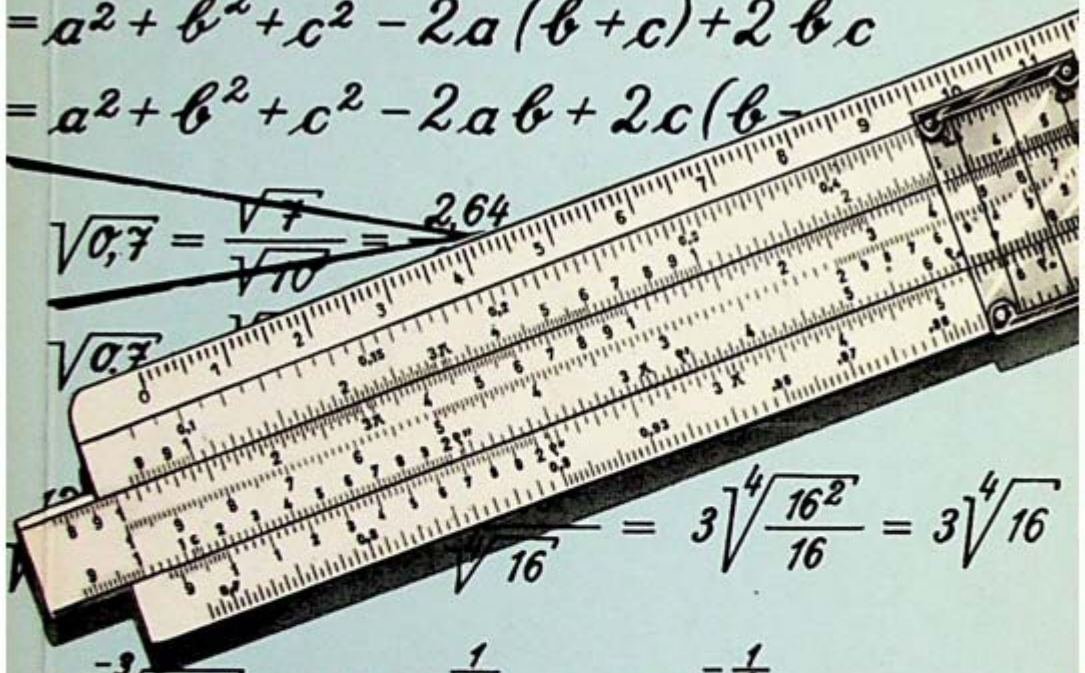
$$(a-b-c)^2=(a-b-c)(a-b-c)$$
$$=a^2-ab-ac+b^2+bc+c^2$$
$$-ab-ac+bc$$

$$=a^2-2ab-2ac+b^2+2bc+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2-2a(b+c)+2bc$$
$$=a^2+b^2+c^2-2ab+2c(b-$$



$$\sqrt{0,7}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}}=2,64$$

$$\sqrt{0,7}$$

$$\sqrt{16}=3\sqrt[4]{\frac{16^2}{16}}=3\sqrt[4]{16}$$

$$\sqrt[-3]{0,001}=0,001^{\frac{1}{-3}}=0,001^{-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{0,001}}=\frac{1}{0,001^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{0,1}=10$$

radio PRAKTIKER bücherei

Franzis

FRITZ KUNZE

Funktechniker lernen Formelrechnen

Die **Cellu-Bände** der Radio-Praktiker-Bücherei

entsprechen dem vielfach geäußerten Wunsch nach höherer Qualität auch der billigen Reihen-Bände. Sie zeichnen sich aus durch * hochwertiges satiniertes Papier für den Inhalt, * wirkungsvoll gestalteten, stärkeren, dauerhafteren Umschlag, * Glanzfolien-Kaschierung, * meist größeren Umfang. — Neue Radio-Praktiker-Bücher und Neuauflagen älterer Bände werden deshalb zumeist als Cellu-Bände erscheinen. Bei einem um nur rund 30% höheren Nummernpreis bieten sie einen besonders hohen Gegenwert; die Radio-Praktiker-Bücherei bleibt auch in den Cellu-Bänden sehr preiswert. Die ersten Cellu-Bände r

9/10	**Tonbandgeräte-Praxis** (Wolfgang Junghans). 8. Aufl. 128 Seiten, 87 Bilder, 6 Tabellen.
27/27 a	**Rundfunkempfang ohne Röhren.** Vom Detektor zum Transistor (Herbert G. Mende). 11. Aufl. 128 Seiten, 94 Bilder, 9 Tabellen.
29/30	**Kleines ABC der Elektroakustik** (Gustav Büscher). 4. Aufl. 148 Seiten, 136 Bilder, 50 Tabellen.
43	**Musikübertragungs-Anlagen.** Planung, Aufbau und Wartung (Fritz Kühne). 4. Aufl. 72 Seiten, 39 Bilder, 11 Tabellen.
44	**Kurzwellen-Amateurantennen** für Sendung und Empfang (W. W. Diefenbach). 6. Aufl. 80 Seiten, 94 Bilder, 10 Tabellen.
45/46	**UKW-Sender- und Empfänger-Baubuch für Amateure** (H. Steinhauser). 5. Aufl. 136 Seiten, 90 Bilder.
47/47 a	**Reiseempfänger mit Transistoren** (H. Sutaner). 4. Aufl. 128 Seiten, 86 Bilder.
50	**Praktischer Antennenbau** (Herbert G. Mende). 9. Aufl. 72 Seiten, 38 Bilder, 9 Tabellen.
58	**Morselehrgang** (Werner W. Diefenbach). 6. Aufl. 68 Seiten, 20 Bilder.
59	**Funk-Entstörungs-Praxis** (Herbert G. Mende). 3. Aufl. 72 Seiten, 43 Bilder, 6 Tabellen.
68/70	**Formelsammlung für den Radiopraktiker** (Dipl.-Ing. Georg Rose). 8. Aufl. 172 Seiten, 183 Bilder.
74	**Einkreis-Empfänger mit Röhren und Transistoren** (H. Sutaner). 5. Aufl. 68 Seiten, 71 Bilder, 3 Tabellen.
80/80 b	**Das Spulenbuch — Hochfrequenzspulen** (H. Sutaner). 4. Aufl. 192 Seiten, 108 Bilder, 15 Nomogramme, 16 Tabellen.
86/87	**Berufskunde des Radio- und Fernsehtechnikers.** Vom Lehrling zum Meister. (Dipl.-Ing. Georg Rose). 2. Aufl. 144 Seiten, 2 Bilder.
95/96	**Fotozellen und ihre Anwendung** (L. Beitz und H. Hesselbach). 2. Aufl. 128 Seiten, 103 Bilder, 6 Tabellen.
99	**Wie arbeite ich mit dem Elektronenstrahl-Oszillografen?** (H. Sutaner). 3. Aufl. 64 Seiten, 87 Bilder.
100	**Daten- und Tabellensammlung für Radiopraktiker** (Herbert G. Mende). 104 Seiten, 40 Bilder, 50 Tabellen. Erschien als Jubiläums-Sonderausgabe.
103	**Die Wobbelsender.** Aufgaben und Schaltungstechnik (H. Sutaner). 64 Seiten, 40 Bilder.
104	**Transistorsender für die Fernsteuerung** (H. Bruß). 64 Seiten, 50 Bilder, 4 Tabellen.

Noch und noch sollen alle Radio-Praktiker-Bücher als **Cellu-Bände** erscheinen. Bitte verlangen Sie das ausführliche Verzeichnis!

Funktechniker lernen Formelrechnen

auf kurzweilige, launige Art

Ein leichtverständlicher mathematischer Lehrgang für Rundfunk- und Fernsehtechniker, Fachschüler, Bastler, Händler und Verkäufer – eine interessante Algebrawiederholung für Funktechniker

Von

FRITZ KUNZE

Mit 42 Bildern
und einer vierstelligen Logarithmentafel

6. Auflage

FRANZIS-VERLAG MÜNCHEN

Verlag der C. Franz'schen Buchdruckerei G. Emil Mayer

Heft 21/21a der RADIO-PRAKTIKER-BÜCHEREI

Cellu-Band

Titelbild nach einem Entwurf von Erich Schülzke

1964

Sämtliche Rechte – besonders das Übersetzungsrecht – an Text und Bildern vorbehalten. Fotomechanische Vervielfältigung nur mit Genehmigung des Verlages. Jeder Nachdruck, auch auszugsweise, und jede Wiedergabe der Bilder, auch in verändertem Zustand, sind verboten.

Druck: G. Franz'sche Buchdruckerei G. Emil Meyer, München 37, Karlstraße 35
Printed in Germany

Vorwort

Mathematische Lehrbücher gibt es eine ganze Anzahl. Es gibt auch einige Bücher, welche ihre Beispiele auf die Funktechnik beziehen. Als Nachschlagewerk sind sie sehr gut, als Lehrbuch zum Selbststudium dagegen sind sie meist wenig geeignet. Wer an Hand dieser Lehrbücher versucht, tiefer in das Geheimnis der Mathematik einzudringen, gibt sein Vorhaben meist nach kurzer Zeit wieder auf. Ein Durchhalten des Selbststudiums, ein Durcharbeiten des Buches bis zum Schluß setzt eine Energie voraus, die meist nicht vorhanden ist. Und so kommt die Mathematik in den Ruf, eine „trockene", für das Selbststudium ungeeignete Wissenschaft zu sein.

Das ist durchaus nicht der Fall. Hier wurde einmal der Versuch unternommen, die Mathematik auf eine leichtverständliche und interessante Art nahezubringen. Ein Ingenieur und ein Praktiker unterhalten sich über die verschiedenen mathematischen Probleme. Auch falsche Lösungen, die sich aufdrängen, werden behandelt und richtiggestellt. Interessant und spannend wird der Stoff dargestellt.

Es werden keine größeren mathematischen Vorkenntnisse verlangt. Volksschulbildung genügt. Das Ziel war, daß der Mechaniker, der Prüfer, der Bastler, der Rundfunkhändler und Verkäufer in der Lage ist, die mathematischen Formeln in den Aufsätzen der Fachpresse und der Fachbücher zu verstehen, daß er sich die mathematischen Kenntnisse eines Funktechnikers aneignen kann. Aus der Praxis für die Praxis.

Im ersten Teil dieses Lehrgangs werden die Grundlagen der Algebra sowie Potenzen und Wurzeln behandelt. Eine Anweisung über die Anwendung des Rechenschiebers zum Errechnen von Potenzen (einschl. der 3/2-Potenz) und Wurzeln schließt sich an. In den weiteren Stunden wird die Anwendung des Rechenschiebers für die Multiplikation und Division und zur Tabellenbildung behandelt, das Arbeiten mit Logarithmentafeln erklärt und eine vierstellige Logarithmentafel von 0,1...99,9 gebracht. Es schließen sich die Binomialrechnung und die Reihenbildung an. Zum Schluß wird die Auflösung von Gleichungen behandelt. Stets werden Beispiele aus der Funktechnik gewählt.

Ich hoffe, daß dieser kurzweilige Lehrgang sich recht viele Freunde erwerben wird, und daß er das hält, was schon viele Bücher versprochen haben und doch nicht immer halten konnten: „Mathematik leicht gemacht".

Fritz Kunze

Inhalt

Einleitung 5
1. Stunde. Die Grundlagen der Algebra I 7
2. Stunde. Die Grundlagen der Algebra II 13
3. Stunde. Die Grundlagen der Algebra III 16
4. Stunde. Die Grundlagen der Algebra IV 21
5. Stunde. Die Grundlagen der Algebra V 25
6. Stunde. Von Potenzen und Wurzeln I 29
7. Stunde. Von Potenzen und Wurzeln II 33
8. Stunde. Von Potenzen und Wurzeln III 37
9. Stunde. Von Potenzen und Wurzeln IV 40
10. Stunde. Von Potenzen und Wurzeln V 44
11. Stunde. Von Potenzen und Wurzeln VI 47
12. Stunde. Der Rechenschieber I 51
13. Stunde. Der Rechenschieber II 54
14. Stunde. Der Rechenschieber III 58
15. Stunde. Der Rechenschieber IV 61
16. Stunde. Der Rechenschieber V 64
17. Stunde. Der Rechenschieber VI 71
18. Stunde. Der Rechenschieber VII 74
19. Stunde. Der Rechenschieber VIII 80
20. Stunde. Das Rechnen mit Logarithmen I 87
21. Stunde. Das Rechnen mit Logarithmen II 91
Vierstellige Logarithmentafel 94
22. Stunde. Binomialrechnung 96
23. Stunde. Reihenbildung 101
24. Stunde. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten .. 107
25. Stunde. Gleichungen ersten Grades mit zwei und mehr Unbekannten 111
26. Stunde. Gleichungen zweiten Grades 117
Literaturverzeichnis 124
Stichwortverzeichnis 125

Einleitung

Oh, diese Formeln! – Ohne Rechnung und Formeln geht's nicht! – Wie soll man nur dahinterkommen? – Nur Mut, junger Freund! – Artikel voller Formeln, wer liest die überhaupt?? – Aber auch solche Artikel sind notwendig – So hoch braucht ja nicht jeder hinaus!

Der Praktiker: Weshalb können nur die Fachschriftsteller nicht einfacher schreiben? Nimmt man irgendeine Fachzeitschrift, irgendein Fachbuch zur Hand, so versteht man zunächst alles ganz gut. Wird es aber etwas schwieriger, dann taucht auch bestimmt irgend so eine komplizierte Formel auf, und aus ist es mit dem Verständnis. Geht es denn tatsächlich nicht einfacher? Ich habe doch wirklich die Absicht, etwas tiefer in die Materie einzudringen, aber diese Formeln sind ein unüberwindliches Hindernis für mich.

Der Ingenieur: Ohne Rechnung ist eine ernsthafte Forschung, ja selbst ein Begreifen physikalischer Vorgänge unmöglich. Vor allem in der Funktechnik und in der gesamten Hochfrequenztechnik ist das Rechnen die Grundlage jeder Arbeit. Ist z. B. in der Schaltung ein Widerstand von 150 kΩ vorgeschrieben, ein solcher aber nicht zur Hand, so kann man an seiner Stelle auch zwei Widerstände von 100 kΩ und 50 kΩ hintereinanderschalten, denn 100 + 50 = 150. D a m i t h a b e n w i r a b e r b e r e i t s e i n e e i n f a c h e F o r m e l. Es geht also nicht ohne Formeln. Wollen Sie tiefer in die Materie eindringen, so müssen Sie sich schon einmal ein klein wenig mit der Mathematik und der Algebra beschäftigen.

Der Praktiker: Ja, wenn das so leicht wäre! In der Schule hatte ich im Rechnen immer „gut". Aber da sind wir nicht allzu sehr über die Grundrechnungsarten hinausgekommen. In der obersten Klasse hatten wir zwar auch etwas Algebra. Aber das habe ich fast alles schon wieder vergessen. Gerade in den funktechnischen Artikeln findet man aber immer so komplizierte Formeln mit Buchstaben und hoch- und tiefstehenden Ziffern und Wurzelzeichen. Wenn ich nur noch wüßte, was das alles bedeutet!

Der Ingenieur: Das ist alles gar nicht so schlimm. Man braucht durchaus keine höhere Schule oder Universität besucht zu haben, um die Buchstabenrechnung und Algebra zu begreifen.

Der Praktiker: In den rein wissenschaftlichen Fachzeitschriften findet man oft Artikel, die fast nur aus Formeln bestehen. Die einzelnen Formeln sind manchmal 30 cm und mehr lang. Und darin kommen Ausdrücke vor, die ich mir überhaupt nicht erklären kann. Gewiß sind diese Artikel kaum für mich berechnet. Die Zeitschriften, in denen sie stehen, haben ja nur einen begrenzten Leserkreis, schon ihr Preis

verbietet ihre Anschaffung für unsereins. Ich habe aber gefunden, daß auch Hochschul-Ingenieure, die doch die notwendige Vorbildung haben, derartige Artikel nicht lesen, sondern einfach überschlagen. Liest denn überhaupt ein Mensch solche Aufsätze? Ich habe manchmal den Eindruck, als ob derartige Artikel mit Absicht so „gelehrt" geschrieben werden, damit sie niemand liest und damit der betreffende Verfasser nicht widerlegt werden kann, sondern als große Leuchte dasteht.

Der Ingenieur: Ganz so liegen die Dinge ja nicht. Gewiß werden solche Formelartikel, die noch dazu mit höherer und höchster Mathematik arbeiten, selten gelesen. Ich überschlage sie auch. Sie müssen aber bedenken, daß viele Probleme nur gelöst werden können, wenn sie mathematisch entwickelt werden. Will man z. B. einer Röhre bestimmte Eigenschaften geben, so kann man nicht einfach mehrere Dutzend verschiedene Röhren bauen und darauf los experimentieren. Es muß sich vielmehr jemand hinsetzen und z. B. die notwendigen Abstände der Elektroden voneinander, die Abstände der Gitterwicklung usw. berechnen. Für die meisten Physiker, Ingenieure und Radiotechniker ist die Mathematik nur ein Hilfsmittel. Gottlob gibt es aber auch Wissenschaftler, die mit Vorliebe in Zahlen denken, für die die Mathematik Lebenszweck ist. Die freuen sich, wenn ihnen eine Aufgabe gestellt wird, und wenn sie recht schwer zu lösen ist. Das sind auch diejenigen, die solche „Nur-Formel-Artikel" verfassen. Aber flunkern können sie dabei nicht, denn es gibt ja auch noch andere Mathematiker, die diese Artikel lesen, so wie Sie eine Schaltung lesen, die dem Laien ja auch ein Buch mit sieben Siegeln ist. Da kommt dann doch jeder Fehler heraus. Wenn wir solche Aufsätze auch kaum lesen, so sind sie doch notwendig, denn sie liefern uns die Grundlagen, auf denen wir weiterbauen können.

Der Praktiker: Das sehe ich ein. Nun, ich habe ja auch nicht den Ehrgeiz, solche „Nur-Formel-Artikel" zu verstehen. Ich wäre schon zufrieden, wenn ich die Formeln verstünde, die in den Radiozeitschriften und in den Fachbüchern für Radiotechniker vorkommen. Wenn Sie mir dazu etwas beibringen könnten, wäre ich Ihnen dankbar.

Der Ingenieur: Das will ich gern tun. Ich sehe, Sie haben Interesse. Das genügt. Die vier Grundrechnungsarten: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division werden Sie ja noch von der Schule her kennen. Weitere Voraussetzungen sind nicht nötig. Sollten Sie noch etwas von der Bruchrechnung wissen, desto besser. Dann wird Ihnen das Studium leicht fallen. Fangen wir also an!

1. Stunde:
Die Grundlagen der Algebra I

Ein Rechengesetz wird gesucht – Buchstaben an Stelle von Zahlen – „x" ist die große Unbekannte – Der Mal-Punkt hat's in sich! – Größte Klarheit tut not! – Die „höheren" Rechnungsarten haben den Vorrang – Die mathematische Rangordnung – Die ordnende Hand – Etwas von Klammern – Das Wort „bis" – Die drei Punkte – Natürliche und allgemeine Zahlen – Gerichtete Zahlen – Negative und positive Gittervorspannung – Das Rechnen mit gerichteten Zahlen.

Der Ingenieur: Wenn ich festgestellt habe, daß 100 + 50 = 150, so habe ich eine Rechen r e g e l gefunden, die nur für einen bestimmten Fall Geltung hat. Will man hieraus ein allgemein gültiges Rechen g e s e t z machen, so muß man an Stelle der bestimmten Zahlen 50, 100, 150 allgemeine Zahlenwerte setzen. Man kann nun statt der Zahlen Buchstaben nehmen und an Stelle der bestimmten Zahlenregel 100 + 50 = 150 die allgemeingültige Rechenregel a + b = c schreiben. Hierbei bezeichnet man bestimmte konstante Zahlenwerte mit den ersten Buchstaben des kleinen lateinischen (a, b, c, d ...) oder griechischen (α, β, γ, δ ...) Alphabets, dagegen unbekannte, veränderliche, variable Größen mit den letzten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets (x, y, z).

Der Praktiker: Dann wäre es doch eigentlich richtiger, zu sagen: a + b = x, da ich nicht von vornherein weiß, wie groß die Summe von a + b sein wird.

Der Ingenieur: Ja, das stimmt.

Der Praktiker: Wie ist es nun mit den anderen Grundrechnungsarten, der Subtraktion, der Multiplikation und der Division? Und weshalb findet man nie ein × für Mal, wie man es in der Schule gelernt hat?

Der Ingenieur: Für die Addition ganzer Zahlen wurde bereits die Regel gefunden: a + b = x. Entsprechendes gilt für die Subtraktion: a – b = y, und für die Multiplikation: a · b = z. In Formeln wird stets das Zeichen: · (Mal-Punkt) und nicht das liegende Kreuz × benützt, wahrscheinlich, um eine Verwechslung mit der Größe x zu vermeiden. Der Mal-Punkt steht nicht wie der Punkt hinter einem Satz auf der Grundlinie, sondern in der Mittelhöhe der Buchstaben oder Zahlen, zwischen denen er steht. Den Mal-Punkt zwischen Buchstaben kann man auch fortlassen: ab = a · b; nie aber darf man ein anderes mathematisches Zeichen fortlassen. Stehen zwei Buchstaben ohne Zeichen nebeneinander, so müssen sie immer miteinander multipliziert werden.

Der Praktiker: Wie ist es nun, wenn mehrere Rechnungsarten nebeneinander vorkommen, z. B. $a \cdot b + c$? Soll in diesem Fall erst a mit b multipliziert und dann c zuaddiert werden, oder soll man b und c addieren und die Summe davon mit a multiplizieren? Kommt in beiden Fällen das gleiche Ergebnis heraus?

Der Ingenieur: Nein, das ist ein großer Unterschied. Nehmen wir ein praktisches Zahlenbeispiel: $4 \cdot 5 + 7$. Multipliziert man 4 mit 5 und addiert 7 hinzu, so ergibt sich als Resultat 27. Addiert man dagegen erst $5 + 7$ und multipliziert diese Summe mit 4, so erhält man 48. Im ersten Fall würde man eindeutiger schreiben: $(4 \cdot 5) + 7$, im zweiten Fall muß man schreiben: $4\,(5 + 7)$. Oder mit Buchstaben ausgedrückt einmal: $[ab] + c = x$, zum andern: $a\,(b + c) = y$. Kommen in der Formel zwei oder mehrere Rechnungsarten vor, so muß also auf möglichst große Klarheit und Eindeutigkeit geachtet werden, indem man zusammengehörende Ausdrücke durch eine Klammer zusammenfaßt.

Der Praktiker: Das sehe ich ein. Wie ist es aber, wenn trotzdem in einer gedruckten Formel keine Klammer steht? Gibt es da keine Regel?

Der Ingenieur: Doch. Es gilt als Regel: Die „höheren" Rechnungsarten werden zuerst ausgeführt.

Der Praktiker: Was sind denn „höhere" Rechnungsarten?

Der Ingenieur: Denken Sie einmal nach, was Sie zuerst rechneten, als Sie zur Schule kamen. Da fingen Sie mit Addition und Subtraktion an. Erst dann kam das „Einmaleins", die Multiplikation und die Division, heran. Also befinden sich die Addition und die Subtraktion auf der untersten Stufe der mathematischen Stufenleiter. Die Multiplikation und die Division stehen auf einer etwas höheren Stufe **(Bild 1)**. Die Addition und Subtraktion sind die Grundlage; man kann alle Rechnungsarten auf sie zurückführen. In dem Beispiel $4 \cdot 5 + 7$ muß man also zuerst stets die Multiplikation $4 \cdot 5$ ausführen und zu dem Produkt dann 7 hinzuaddieren.

Oder ein anderes Beispiel: $4 \cdot 5 + 7 + 3 \cdot 10 - 5 - 12 : 3 - 2 \cdot 3 + 25$. Es sind erst die Multiplikationen und Divisionen auszuführen, so daß die Aufgabe dann nur noch heißt: $20 + 7 + 30 - 5 - 4 - 6 + 25$. Nun kann man noch weiter ordnen und die Additionen und Subtraktionen sortieren: $(20 + 7 + 30 + 25) - (5 + 4 + 6) = 67$. Hier sehen wir gleich etwas anderes. Dadurch, daß wir die abzuziehenden Beträge in einer Klammer zusammengefaßt haben, erhalten diese Ziffern innerhalb der Klammer plötzlich Plus-Vorzeichen! Doch darüber werden wir uns später noch einmal unterhalten.

Der Praktiker: Sie haben jetzt nur Zahlenbeispiele gebracht. Bei Buchstaben verhält sich das wohl ebenso?

Bild 1. Die mathematische Stufenleiter

Bild 2. Die Thermometerskala enthält gerichtete Werte

Der Ingenieur: Selbstverständlich!

Zum Beispiel würde $2\,a + b - c \cdot a - b : c + b - a$ bedeuten:

$2\,a + b - (c \cdot a) - \frac{b}{c} + b - a$. Es besteht ja kein prinzipieller Unterschied zwischen Zahlen und Buchstaben. Ich kann ja jederzeit die Zahlen durch Buchstaben ersetzen.

Der Praktiker: Nun sieht man manchmal die verschiedensten Klammerarten: runde Klammern ( ), eckige Klammern [ ], Klammern mit einer Spitze in der Mitte $\{\ \}$ usw. Was haben diese Klammern im einzelnen zu bedeuten, und welche Unterschiede bestehen da?

Der Ingenieur: Im allgemeinen verwendet man die runden Klammern ( ). Kommt nun innerhalb eines Klammerausdrucks ein weiterer nochmals eingeklammerter Wert vor, so muß man die beiden Klammerpaare voneinander unterscheiden können. Man kann das innere Klammerpaar in gewöhnlicher Schriftart drucken, das äußere Klammerpaar dagegen fett, man kann aber auch für das eine Klammerpaar

runde, für das andere eckige Klammern nehmen. Die Hauptsache ist auch hier wie immer äußerste Klarheit und Eindeutigkeit.

Beispiel: $n\,[(a+b)\cdot(a-b)]$

Reichen diese beiden Klammerarten nicht aus, so nimmt man noch die Nasenklammer zur Hilfe:

Beispiel: $5\,\{n\,[(a+b)\,(a-b)]+c\}$

Ebenso gut kann man auch die eckige Klammer als äußerste Klammer nehmen. Die Klammer muß auf jeden Fall so groß sein wie die Zahlen oder Buchstaben, die sie umschließt.

Beispiel: $R+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$

Eine große Nasenklammer dient außerdem noch zur Zusammenfassung von mehreren zueinandergehörenden Teilen, wobei die umklammerten Seiten die zusammengehörigen Teile umklammern, die Spitze (Nase) dagegen nach dem gemeinsamen Teil oder nach der Formelziffer hinweist.

Beispiel: $(a+b)\begin{cases}(c+d)\\(e+f)\\(c-f)\end{cases}$

Klammern werden ferner bei der Numerierung der Formeln benutzt. Werden nämlich Gleichungen oder Formeln numeriert, so schreibt man die Formelnummer an den Rand und setzt sie in Klammern. Auch im Text werden die Formelnummern in Klammern gesetzt.

Beispiel: Wie in Gleichung (6) bereits aufgezeigt ...

Der Praktiker: Die verschiedenen Klammerarten und ihre Anwendung habe ich nun verstanden. Im Zusammenhang damit hätte ich aber noch eine Frage, die das Wort „bis" betrifft. So hat man früher geschrieben, wenn man sagen wollte, 80 bis 100 V: 80 – 100 V. Jetzt sieht man aber öfter: 80...100 V. Auch habe ich schon gelesen: 80 ÷ 100 V. Was sind da für Unterschiede?

Der Ingenieur: Der einfache Strich – bedeutet „weniger", wenn er zwischen zwei Zahlen steht; man soll die zweite Zahl von der ersten abziehen; er kann aber auch eine negative Zahl ausdrücken: 80 – 100 = – 20. Um eine Verwechslung des „bis" bedeutenden Striches mit „weniger" oder „minus" zu vermeiden, bediente man sich für „bis" des Zeichens ÷. Aber auch davon ist man abgegangen, die DIN-Normen schreiben jetzt vor, daß man für „bis" drei Punkte setzt. Allein richtig ist es, 80...100 V zu schreiben. Genau dieselbe Bedeutung haben die drei Punkte auch, wenn sie zwischen zwei Buchstaben stehen: a...n V. Stehen die drei Punkte aber nicht zwischen zwei Ziffern oder Buchstaben, sondern am Ende, so bedeuten sie etwas anderes, nämlich: „undsoweiter". Bei $U_g = 1, 2, 3, 4 \ldots$ V, wie auch bei a, b, c ... V, meint man also: „undsoweiter" bzw. „undsofort".

Der Praktiker: Soeben haben wir den Ausdruck gehabt: $80 - 100 = -20$. Können Sie mir bitte die Bedeutung dieses negativen Wertes etwas näher erklären?

Der Ingenieur: Man muß mehrere Zahlenarten unterscheiden. Zwei verschiedene Arten hatten wir schon. Einmal die Ziffern: 1, 2, 3, 4, 5 ..., die man natürliche Zahlen nennt, und zum anderen a, b, c, d ..., die man allgemeine Zahlen nennt. Diese Zahlen sind, wenn sie nicht bezeichnet sind, positive Werte. Sehen wir einmal das Thermometer an (**Bild 2**). Jeder weiß, daß die Zahlen über dem Nullpunkt Wärmegrade sind. Unter dem Nullpunkt fängt man nochmals von vorn zu zählen an, aber nach der anderen Richtung. Diese Kältegrade erhalten ein Minus-Vorzeichen. Wärmegrade sowohl wie Kältegrade sind also auf einen bestimmten Punkt bezogen, sie sind gerichtete Zahlenwerte, wobei die Wärmegrade positive Zahlen sind und ein +-Vorzeichen erhalten, und die Kältegrade negative Zahlen sind und ein −-Vorzeichen erhalten (das +-Zeichen kann man auch fortlassen, niemals aber das −-Zeichen!). Sowohl die positive Zahlenreihe als auch die negative Zahlenreihe fangen im Nullpunkt an. Dieser Nullpunkt selbst ist aber eine willkürliche Annahme. So zählt man bei der Messung der absoluten Temperatur nach Kelvingraden vom absoluten Nullpunkt an, der -273° C entspricht. Bei dieser Zählungsart kennt man also nur positive, aber keine negativen Werte.

Der Praktiker: Auch bei der Gittervorspannung der Röhren kennt man ja Zahlen mit +- und −-Vorzeichen. Dann sind das demnach auch gerichtete Zahlen?

Der Ingenieur: Jawohl, auch hier handelt es sich um gerichtete Zahlen. Auch hier gehen sowohl negative als auch positive Gittervorspannung vom Nullpunkt aus (**Bild 3**). Auch hierbei ist der Bezugspunkt für $U_g = 0$ V verschieden, je nachdem, ob man Batterie- oder Netzröhren vor sich hat. Bei Netzröhren bezieht er sich auf die Katode, die mit dem Mittelpunkt der Heizung verbunden ist, bei Batterieröhren auf den Minuspol, der um die halbe Heizspannung negativer ist als der Mittelpunkt der Heizung.

Der Praktiker: Bei der negativen Gittervorspannung weiß man immer nicht, wie man sich korrekt ausdrücken soll. Angenommen, ich habe eine Gittervorspannung von -4 V. Nun heißt es, ich soll eine um 2 V höhere Gittervorspannung nehmen. Ist da -6 V oder -2 V gemeint?

Der Ingenieur: Diese Frage kann man nicht leicht beantworten. Auf jeden Fall ist eine solche Ausdrucksweise nicht korrekt. Man weiß nicht, ob die Gittervorspannung um 2 V höher positiv oder höher negativ werden soll. Im ersten Fall wäre zu rechnen: $-4 + (+2) = -2$ V, im zweiten Fall: $-4 + (-2) = -6$ V. Wenn man von einer gerichteten Zahl ausgeht, so muß man unbedingt auch bei der zu

addierenden Zahl die Richtung angeben. Richtig wäre es also zu sagen, man sollte die Gittervorspannung um 2 V negativer bzw. positiver machen.

Der Praktiker: Sie haben soeben gesagt, $-4 + (-2) = -6$ V. Wieso kommt dieses Resultat heraus und wie rechnet man überhaupt mit gerichteten Zahlen?

Der Ingenieur: Angenommen, ich habe zu rechnen: $4 + 7 + 3 - 8$. Da kann ich die Reihenfolge jederzeit vertauschen; ich kann mit der 7 anfangen, ich kann aber auch sagen: $-8 + 3 + 4 + 7$. Genau dasselbe gilt, wenn ich mehrere verschiedene Glieder habe, z. B.: $4 + 7 - 8 + 3 - 5 + 12 - 9$. In solchen Fällen addiere ich alle positiven Werte und alle negativen Werte für sich und ziehe dann die Summe der negativen Werte von der Summe der positiven Werte ab. Ich würde also rechnen: $(4 + 7 + 3 + 12) - (8 + 5 + 9)$. Wie sich jeder überzeugen kann, kommt in beiden Fällen dasselbe heraus. Ein ähnliches Beispiel haben wir ja schon gehabt. Allgemein ausgedrückt kann man also sagen: $a + b + c + d - e - f - g = (a + b + c + d) - (e + f + g)$. Ist die Minussumme größer als die Plussumme, so zieht man umgekehrt die Plussumme von der Minussumme ab, die Restsumme ist dann ein Minuswert. Stets also zieht man die kleinere Summe von der größeren ab und gibt der Differenz das Vorzeichen der größeren Summe.

Beispiel:

$4 + 7 - 8 + 3 - 15 + 12 - 9 = (4 + 7 + 3 + 12) - (8 + 15 + 9) = 26 - 32 = -6$.

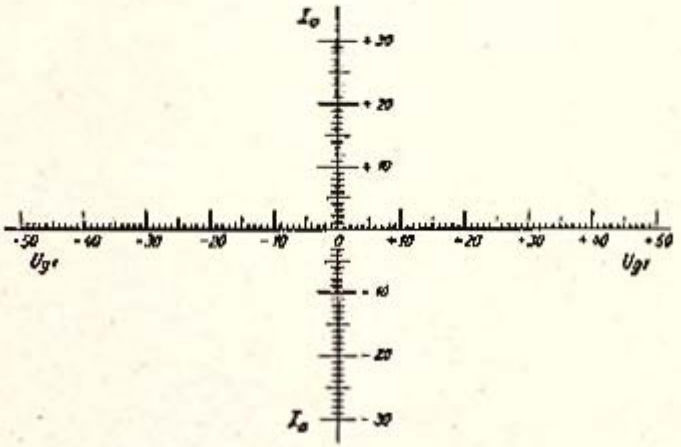


Bild 3. Das I_a-U_{g1}-Kennlinienfeld ist ein mathematisches Achsenkreuz

2. Stunde:
Die Grundlagen der Algebra II

Das Rechnen mit negativen Zahlen – Vorzeichen-Regeln – Identische Gleichungen – Sind das tote Buchstaben? – Die Rechnung muß stimmen – In der Funktechnik gibt es besondere Symbole – Die Multiplikation von Klammerausdrücken – Algebraische Zahlen.

Der Ingenieur: Bei allen Beispielen, die wir in der ersten Stunde besprachen, waren die Zahlen als solche, ob sie nun addiert oder subtrahiert werden mußten, positive Zahlen. $4 + 2 = 6$, das ist klar. Ist nun aber 2 eine negative Zahl, also -2, so wird das Ergebnis nicht um 2 größer, sondern kleiner als 4. Also: $4 + (-2) = 2$, ebenso wie $4 - 2$, denn hierfür könnte man ebenso gut sagen: $4 - (+2)$. Wir sehen also: aus $+(-)$ und $-(+)$ wird minus. Sind beides negative Zahlen, so ist zu rechnen: $-4 + (-2) = -6$, $-4 - (-2) = -2$.

Der Praktiker: Das verstehe ich nicht ganz. Wieso ist $-4 - (-2) = -2$? Ich würde doch annehmen, daß -6 herauskommt!

Der Ingenieur: Sie kennen doch wohl das Sprichwort: Eine doppelte Verneinung ist einfache Bejahung. So ist es auch hier. Wenn Sie die Klammer auflösen, so wird aus $-(-2)$: $+2$. Und $-4 + 2$ ist -2.

Der Praktiker: Wie ist es nun bei allgemeinen Zahlen, also bei Buchstaben?

Der Ingenieur: Genauso. Auch dann, wenn zu den Buchstaben auch Zahlen hinzukommen. Einige Beispiele mögen das veranschaulichen:

Beispiel:

$$\begin{aligned}
(-5a) + (-12a) &= -17a; & (-5a) + (-12b) &= -(5a + 12b)\\
5a + (-12a) &= -7a; & 5a + (-12b) &= 5a - 12b\\
(-5a) + 12a &= 7a; & (-5a) + 12b &= 12b - 5a
\end{aligned}$$

Aus diesem Beispiel können wir gleich ein paar Regeln ableiten: Es können immer nur gleiche Größen addiert oder subtrahiert werden. Man kann also alle a addieren bzw. subtrahieren, alle b usw. Bei ungleichen Vorzeichen zieht man den kleineren Wert vom größeren ab und gibt der Differenz das Vorzeichen des größeren Wertes, bei gleichen Vorzeichen addiert man die Werte und gibt der Summe das gemeinsame Vorzeichen. Bei der Subtraktion ist zunächst die Klammer aufzulösen; aus ungleichen Vorzeichen wird dabei stets $-$ und aus gleichen Vorzeichen $+$. Also:

$$\begin{aligned}
(+25a) - (+8a) &= 25a - 8a = 17a\\
(+25a) - (-8a) &= 25a + 8a = 33a\\
(-25a) - (-8a) &= -25a + 8a = -17a
\end{aligned}$$

Stehen mehrere Ausdrücke in der Klammer, so spielt das keine weitere Rolle. Stets ist daran festzuhalten, daß aus gleichen Vorzeichen, also + und + oder − und −, stets +, und aus ungleichen Vorzeichen, also + und − oder − und +, stets − wird.

Beispiele:

$$a + (b + c) = a + b + c; \quad 5 + (8 + 7) = 5 + 8 + 7 = 20$$
$$a + (b - c) = a + b - c; \quad 5 + (8 - 7) = 5 + 8 - 7 = 6$$
$$a - (b + c) = a - b - c; \quad 5 - (8 + 7) = 5 - 8 - 7 = -10$$
$$a - (b - c) = a - b + c; \quad 5 - (8 - 7) = 5 - 8 + 7 = 4$$

$$5a + 3b - 8c + [3a - 9b + 3c] - (4a + 12b - 5c)$$
$$= 5a + 3b - 8c + 3a - 9b + 3c - 4a - 12b + 5c$$
$$= 4a - 18b$$

Der Praktiker: Sind die Beispiele, die Sie da gebracht haben, nicht bereits Gleichungen? Und wozu soll ich denn das alles lernen; a, b, c usw. sind doch alles tote Begriffe, die ich in der Praxis doch nicht gebrauche! Wozu solches Jonglieren mit Buchstaben?

Der Ingenieur: Jawohl, die gebrachten Beispiele sind bereits Gleichungen. Eine Gleichung ist stets dann vorhanden, wenn zwei gleich große Werte durch ein Gleichheits-Zeichen (=) miteinander verbunden sind. Die Werte links und rechts vom Gleichheitszeichen sind also einander gleich. In den gebrachten Beispielen ist eine weitere Auflösung nicht möglich; man kann insbesondere nicht bestimmen, wie groß nun eigentlich a, b und c sind. Man nennt diese Art Gleichungen „identische Gleichungen". Will man hierauf besonders hinweisen, so kann man an Stelle des Gleichheitszeichens = das Identitätszeichen ≡ nehmen. Im allgemeinen ist das aber nicht üblich.

Gewiß sind die Rechnungen, die wir durchgeführt haben, ein Jonglieren mit toten Buchstaben. Sie werden aber bald sehen, wie diese scheinbar toten Buchstaben lebendige Wirklichkeit werden. In den praktischen Formeln für die Funktechnik sind wir alle Augenblicke vor die Notwendigkeit gestellt, Gleichungen umzubilden und Klammerausdrücke aufzulösen. Deshalb muß man sich die Regeln hierfür gut merken, und ihre Anwendung muß einem in Fleisch und Blut übergehen. Aber nicht etwa auswendig lernen müssen Sie das alles, sondern verstehen und begreifen. Wenn Ihnen ein Beispiel nicht klar ist, so ersetzen Sie bitte die Buchstaben durch Zahlen, da haben Sie dann die beste Kontrolle, ob die Rechnung stimmt.

In der Radiotechnik verwenden wir weniger die Buchstaben a, b, c usw., unter denen wir uns nichts vorstellen können, als bestimmte Buchstabensymbole, wie U (Spannung), I (Strom), R (Widerstand), S (Steilheit), D (Durchgriff) usw. Wenn ich z. B. sage: $U = I \cdot R$, so habe ich damit zugleich ein Gesetz aufgestellt, das Ohmsche Gesetz. Ich brauche nur die Zahlenwerte von I und R einzusetzen und kann dann sofort U bestimmen. Ebenso gut könnte ich aber sagen: $x = a \cdot b$. Da ist kein grundsätzlicher Unterschied.

Der Praktiker: Wie werden Klammerausdrücke multipliziert?

Der Ingenieur: Zunächst wollen wir uns noch einmal klarmachen, was eigentlich eine Multiplikation ist. Man kann jede Multiplikation auf eine Addition zurückführen. So ist z. B. $3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5$. Entsprechend ist $a + a + a + a + a = 5 \cdot a = 5a$. Wenn ein Klammerausdruck mit einer Zahl oder einem Buchstaben multipliziert werden soll, so muß jedes einzelne Glied innerhalb der Klammer mit der vor der Klammer stehenden Zahl oder dem vor der Klammer stehenden Buchstaben multipliziert werden. Es ist also: $5(a + b) = 5a + 5b$; $d(a + b) = ad + bd$. Und umgekehrt ist auch $3ac + 12ab + 21da = 3a(c + 4b + 7d)$.

Der Praktiker: Da komme ich nicht ganz mit. Wenn wir an Stelle von Buchstaben Zahlen nehmen, so ist die Rechnung doch ganz anders! Ist z. B. $a = 3$ und $b = 8$, so ergibt $5(a + b) = 5(3 + 8)$. Nach Ihrer letzten Auslegung müßte ich erst $5 \cdot 3$ nehmen, dann $5 \cdot 8$, und dann beides addieren. Früher hatten wir doch aber gelernt, wir sollen erst den Klammerausdruck auflösen und dann erst multiplizieren, also $5 \cdot 11$ rechnen!

Der Ingenieur: Rechnen Sie doch beides einmal nach! Sie werden sehen, es kommt dasselbe heraus. $5 \cdot 3 = 15$; $5 \cdot 8 = 40$, $15 + 40 = 55$. Und $5 \cdot 11$ ist auch 55. Wenn man den Klammerausdruck in sich auflösen kann, so soll man es tun. Bei $5(a + b)$ aber kann man ihn nicht vorher auflösen. a und b sind zwei verschiedene Begriffe.

Der Praktiker: Wie ist es nun, wenn zwei größere Klammerausdrücke miteinander multipliziert werden sollen? Multipliziert man dann auch alle Zahlen untereinander?

Der Ingenieur: Sind zwei oder mehr Klammerausdrücke zu multiplizieren, so multipliziert man die einzelnen Zahlen und Buchstaben miteinander.

Zum Beispiel:

$$(a + b + c)(d + e + f) = ad + ae + af + bd + be + bf + cd + ce + cf = d(a + b + c) + e(a + b + c) + f(a + b + c)$$

Der Praktiker: Wie werden Klammern aufgelöst bzw. multipliziert, wenn negative Zahlen darin enthalten sind?

Der Ingenieur: Haben algebraische Zahlen – so wollen wir sie jetzt nennen, um auszudrücken, daß nicht nur Zahlen, sondern auch Buchstaben gemeint sind – gleiche Vorzeichen, so wird bei einer Multiplikation das Vorzeichen immer positiv (+), haben sie ungleiche Vorzeichen, so wird das Produkt immer negativ (–). Also:

$$(a)(b) = ab; \quad (-a)(-b) = ab;$$
$$(a)(-b) = -ab; \quad (-a)(b) = -ab;$$
$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd;$$
$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd;$$
$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd;$$

$6a\,(7b - 5c) + 4a\,(5b + 10c) = 42ab - 30ac + 20ab + 40ac = 62ab + 10ac = 2a\,(31b + 5c)$.

Der Praktiker: Die ersten Beispiele können doch nicht stimmen! Sie erhalten das Resultat $a \cdot b$ einmal aus (a) (b) und einmal aus (−a) (−b). Wenn das richtig ist, so würde man ja gar nicht feststellen können, ob die Faktoren positiv oder negativ sind. Und bei −ab würde man nicht wissen, ob a oder b negativ ist.

Der Ingenieur: Das kann man auch nicht feststellen. Ist das Produkt positiv, so haben die Faktoren gleiche Vorzeichen (+ oder −). Ist das Produkt negativ, so haben die Faktoren ungleiche Vorzeichen (einer ist negativ, einer positiv).

Der Praktiker: Die Multiplikation ist mir jetzt völlig klar. Wie ist es aber mit der Division? Ich habe mich schon gewundert, daß Sie die Division bis jetzt mit keinem Wort gestreift haben.

3. Stunde:
Die Grundlagen der Algebra III

Die Division – Gemeine Brüche und Dezimalbrüche – Geometrische Proportionen – Geheimnisvolle Tauschgeschäfte – Arithmetische Proportionen – Bruchregeln.

Der Ingenieur: Die Division führt in das Gebiet der Bruchrechnung hinein: Es ist z. B. $100 : 25 = 4$. Für $100 : 25$ kann man auch setzen $\frac{100}{25}$ und hat damit einen Bruch. Umgekehrt ist es ebenso: $25 : 100 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$. Für $\frac{25}{100}$ kann man auch setzen 0,25. Im ersten Fall hat man es mit einem gemeinen Bruch, im zweiten Fall mit einem Dezimalbruch zu tun. Gemeine Brüche können durch Buchstaben und Zahlen dargestellt werden: $\frac{U}{I} = R$; $\frac{220}{2} = 110$. Dezimalbrüche dagegen können nur durch Zahlen dargestellt werden. Bei einem gemeinen Bruch heißt die Zahl über dem Bruchstrich Zähler, die Zahl unter dem Bruchstrich Nenner. So ist bei dem Ausdruck $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ die 3 der Zähler, die 4 der Nenner. Die Division läßt sich auf eine Multiplikation und eine Addition zurückführen. So ist $\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. Entsprechend ist $a \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c}$; $a \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$.

Der Praktiker: Ist es nun richtiger, zu schreiben 3 : 4 oder $^3/_4$ oder $\frac{3}{4}$?

Der Ingenieur: Die Formen 3 : 4 und $^3/_4$ sind mehr schulmäßig und für den Hausgebrauch. Den Schrägstrich verwendet man manchmal auch in der Radiotechnik, z. B. schreibt man bei Steilheit mA/V, bei Kapazität pF/cm (man meint damit z. B. die Kapazität in pF je cm Länge einer abgeschirmten Leitung) usw. Dies heißt Milliampere pro Volt und Picofarad pro Zentimeter. Bei Rechenaufgaben aber ist nur die Form $\frac{3}{4}$ mathematisch exakt. Die Form 3 : 4 wird in der Mathematik zwar auch gebraucht, sie hat auch die Bedeutung einer Division, soll dann aber ein Verhältnis ausdrücken. Wenn ich z. B. sage a : b = c : d oder 21 : 35 = 6 : 10, so will ich damit ausdrücken, daß a zu b sich verhält wie c zu d. Man nennt dieses Verhältnis eine geometrische Proportion. Eine Eigentümlichkeit der geometrischen Proportion sei hier gleich behandelt: Das Produkt der Innenglieder ist gleich dem Produkt der Außenglieder. Bei 21 : 35 = 6 : 10 z. B. ist 35 · 6 = 210 und ebenso ist 21 · 10 = 210! Auf Grund dieser Tatsache kann man, wenn drei Größen bekannt sind, jederzeit die vierte, unbekannte Größe feststellen.

Beispiel: 1 m Kupferdraht von 0,05 mm Durchmesser hat einen Widerstand von 9 Ohm. Wie groß ist der Widerstand von 16 m Kupferdraht? Es verhält sich 1 : 9 = 16 : x. Es ist demnach 1 · x = 9 · 16, x = 144. Oder ein anderes Beispiel: Durch einen Widerstand von 20 Ohm fließt ein Strom von 5 Ampere, wenn eine Spannung von 100 Volt angelegt wird. Wie groß ist der durchfließende Strom, wenn eine Spannung von 220 Volt angelegt wird? Eine eventuelle Widerstandsänderung durch Erwärmung soll dabei unberücksichtigt bleiben. – Es ist $\frac{U}{I} = R$. Wenn R also gleich bleibt, muß das Verhältnis $\frac{U}{I}$ also auch dasselbe bleiben. Steigt U, so muß I in demselben Maße steigen. Es ist also die Gleichung aufzustellen: 100 : 5 = 220 : x. Nach dem Vorhergesagten ist: 5 · 220 = 100 x, x ist also $\frac{5 \cdot 220}{100} = 11$ Ampere. Diese Rechenart ist sehr wichtig und kommt alle Augenblicke vor.

Der Praktiker: Solche Aufgaben haben wir in der Schule immer nach dem Regeldetri-Verfahren gelöst. Wenn ich ehrlich sein soll, habe ich damals aber nie behalten können, was über und was unter den Bruchstrich kommt.

Der Ingenieur: Das Regeldetri-Verfahren kommt zu demselben Bruchansatz. Mit dem Kniff des Vergleichs der Innenglieder mit den Außengliedern ist aber eine Proportion sehr leicht zu lösen, und eine Verwechslung ist ausgeschlossen.

Der Praktiker: Sie haben recht, die Auflösung einer Proportion ist tatsächlich kinderleicht und einfach.

Der Ingenieur: Und doch steckt eine Proportion noch voller geheimnisvoller Regeln. Man kann da allerhand Tauschgeschäfte machen, und trotzdem stimmt's immer.

	Ein Beispiel:			
Die Proportion heißt	30 : 5	=	150 : 25	(a : b = c : d)
Nun lassen sich vertauschen:				
a) beide Seiten	150 : 25	=	30 : 5	(c : d = a : b)
b) die Innenglieder	30 : 150	=	5 : 25	(a : c = b : d)
c) die Außenglieder	25 : 5	=	150 : 30	(d : b = c : a)
d) Innen- und Außenglieder	25 : 150	=	5 : 30	(d : c = b : a)
e) jede Seite unter sich	5 : 30	=	25 : 150	(b : a = d : c)
Es können vereinigt werden:				
f) die dritte mit der ersten und die vierte mit der zweiten Zahl	150 : 30	=	25 : 5	(c : a = d : b)
g) die zweite mit der vierten und die erste mit der dritten Zahl	5 : 25	=	30 : 150	(b : d = a : c)

Wenn Sie sich alle diese Möglichkeiten ansehen, so werden Sie merken, daß stets das Produkt der Innenglieder gleich dem Produkt der Außenglieder ist, die Proportion also stimmt, und daß als Produkt stets 750 herauskommt, natürlich nur in diesem Beispiel. Bei anderen Zahlen ergibt sich ein anderes Produkt.

Der Praktiker: Sie nannten vorhin diese Rechnung geometrische Proportion. Gibt es noch andere Proportionen?

Der Ingenieur: Es gibt noch arithmetische Proportionen. Während es sich bei der geometrischen Proportion um eine Divisions- bzw. Multiplikationsaufgabe handelt, hat man bei der arithmetischen Proportion eine Additions- bzw. Subtraktionsaufgabe zu lösen. Eine solche arithmetische Proportion ist z. B. die Gleichung $a - b = c - d$. Hierbei ist die Summe der Innenglieder gleich der Summe der Außenglieder: $b + c = a + d$. Zahlen beweisen dies: $37 - 16 = 51 - 30$; $16 + 51 = 67$; $37 + 30 = 67$.

Eine andere arithmetische Gleichung ist z. B. $a + b = c + d$. In einem solchen Fall ist die Differenz der Innenglieder gleich der Differenz der Außenglieder: $5 + 16 = 11 + 12$; $16 - 11 = 7$; $12 - 5 = 7$. Diese Art ist nichts weiter als eine Umkehr der soeben behandelten arithmetischen Proportion als Subtraktionsaufgabe. Die arithmetische Proportion hat jedoch in der Praxis lange nicht die Bedeutung wie die geometrische Proportion.

Der Praktiker: Wie nennt man eigentlich die einzelnen Glieder bei einer Divisionsaufgabe?

Der Ingenieur: Die einzelnen Glieder bei den Rechenaufgaben haben wir bisher nicht weiter genannt, wir haben aber bereits eifrig mit

ihnen gearbeitet. Wichtig sind die Bezeichnungen für die Resultate, die man mit ihnen erzielt.

Art	Beispiel	Bezeichnungen
Addition	$a + b = c$	a, b = Summanden, c = Summe
Subtraktion	$a - b = c$	a = Minuend (Grundzahl), b = Subtrahend (abzuziehende Zahl), c = Differenz (Rest)
Multiplikation	$a \cdot b = c$	a und b = Faktoren; a = Multiplikand (Grundzahl), b = Multiplikator (Malnehmer), c = Produkt (Malwert)
Division	$a : b = \frac{a}{b} = c$	a = Dividend = Zähler (zu teilende Zahl, Grundzahl), b = Divisor = Nenner (teilende Zahl, Teiler), c = Quotient (Teilwert)

Will man feststellen, ob eine Subtraktion stimmt, so macht man die sogenannte „Probe": Man zählt Subtrahend und Differenz zusammen. Herauskommen muß der Minuend. Man verwandelt also die Subtraktionsaufgabe in eine Additionsaufgabe.

Beispiel:

25 − 17 = 8 ; 17 + 8 = 25
Minuend Subtrahend Differenz Subtrahend Differenz Minuend

Der Praktiker: Das ist ja alles ganz schön! Ich bin aber überzeugt, daß ich nach vier Wochen nicht mehr weiß, was nun Multiplikand und was Multiplikator ist, was Dividend und was Divisor ist.

Der Ingenieur: Merken Sie sich einfach folgendes: Die zweite Zahl hat die Bezeichnung mit der Endung „or" (Multiplikator, Divisor). Für Multiplikand und Multiplikator verwendet man auch die gemeinsame Bezeichnung Faktoren.

Der Praktiker: Wie geschieht die Division von Klammerausdrücken, und verändern sich dabei die Vorzeichen von negativen Zahlen?

Der Ingenieur: Wir wollen uns, bevor wir uns mit diesen Fragen beschäftigen, erst noch einmal kurz die Regeln der Bruchrechnung, wie wir sie in der Schule gelernt haben, ins Gedächtnis zurückrufen.

a) Zähler und Nenner eines Bruches kann man mit derselben Zahl multiplizieren oder dividieren, ohne daß der Wert des Bruches geändert wird.

Beispiel: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7}$; $\frac{a}{d} = \frac{ab}{db} = \frac{ab}{bd}$;

$\frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 9}{3} = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$; $\frac{abc}{bd} = \frac{ac}{d}$

Wie wir sehen, ist dieses letzte Verfahren nichts weiter als eine Kürzung der Brüche.

b) Gleichnamige Brüche (also Brüche, die denselben Nenner haben) werden addiert oder subtrahiert, indem man die Zähler addiert bzw. subtrahiert.

Beispiel: $\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{3+5}{4}=\frac{8}{4}=2$; $\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}$;

$\frac{9}{12}-\frac{4}{12}=\frac{9-4}{12}=\frac{5}{12}$; $\frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{a-b}{d}$;

$\frac{9a}{3d}-\frac{4a}{3d}=\frac{9a-4a}{3d}=\frac{5a}{3d}$

c) Ungleichnamige Brüche müssen erst durch Multiplikation gleichnamig gemacht werden. Zu diesem Zweck multipliziert man Zähler und Nenner des Bruches mit dem Nenner des anderen Bruches. Sind sie gleichnamig gemacht, so verfährt man mit ihnen wie unter b).

Beispiel: $\frac{3}{4}+\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 7}+\frac{5\cdot 4}{4\cdot 7}=\frac{21+20}{28}=\frac{41}{28}$;

$\frac{a}{b}-\frac{d}{c}=\frac{ac}{bc}-\frac{bd}{bc}=\frac{ac-bd}{bc}$

$\frac{5a}{2b}-\frac{7d}{3c}=\frac{5a\cdot 3c}{2b\cdot 3c}-\frac{7d\cdot 2b}{2b\cdot 3c}=\frac{15ac-14bd}{6bc}$

$\frac{6}{2b}+\frac{13}{3b}=\frac{6\cdot 3}{2\cdot 3b}+\frac{2\cdot 13}{2\cdot 3b}=\frac{18+26}{6b}=\frac{22}{3b}$

d) Brüche werden mit ganzen Zahlen multipliziert, indem der Zähler des Bruches mit der ganzen Zahl multipliziert wird.

Beispiel: $5\cdot\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 3}{4}=\frac{15}{4}$; $a\,\frac{b}{d}=\frac{ab}{d}$

e) Brüche werden miteinander multipliziert, indem man die Zähler miteinander und die Nenner miteinander multipliziert.

Beispiel: $\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{15}{16}$; $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$;

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$; $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{a}=\frac{c}{b}$;

f) Brüche werden durcheinander dividiert, indem man den zweiten Bruch umdreht und dann die beiden Brüche miteinander multipliziert. Man verwandelt also die Divisionsaufgabe in eine Multiplikationsaufgabe.

Beispiel: $\frac{4}{5}:\frac{3}{4}=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3}=\frac{16}{15}$; $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$;

$\frac{5}{4}:\frac{3}{4}=\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$; $\frac{a}{d}:\frac{b}{d}=\frac{a}{b}$;

Die Brüche werden also gewissermaßen über Kreuz multipliziert, wobei der erste Bruch bestimmt, was Zähler und was Nenner ist.

4. Stunde:
Die Grundlagen der Algebra IV

Achtung, nicht verwechseln! – Die Division von gerichteten Zahlen – Die Division von Brüchen – Die Aufgabe ist halb so schlimm! – Aus den Buchstaben wird eine 1 – Diese Formel kenne ich doch! – Parallel geschaltete Widerstände – Wie ist's nur richtig? – Berechnung von Selbstinduktionen und Kapazitäten – Nur logisch denken!

Der Ingenieur: Auf einen grundlegenden Unterschied zwischen Zahlenrechnen und Buchstabenrechnen, also zwischen bestimmten und allgemeinen Zahlen, sei bei dieser Gelegenheit hingewiesen: Wenn man bei allgemeinen Zahlen einen Buchstaben vor einen Bruch setzt, so bedeutet das, daß beide miteinander zu multiplizieren sind: $a\frac{b}{c} = a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$. Setzt man aber bei bestimmten Zahlen eine Ziffer vor einen Bruch, so bedeutet das, daß beide miteinander zu addieren sind: $2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$. Will ich a zu $\frac{b}{c}$ addieren, muß ich ein Pluszeichen zwischensetzen: $a + \frac{b}{c}$. Und bei Zahlen wiederum kann ich das Pluszeichen fortlassen: $2 + \frac{3}{4} = 2\frac{3}{4}$, aber nie den Malpunkt: $2 \cdot \frac{3}{4}$. Die Auflösung der Rechnung selbst ist natürlich bei Zahlen und Buchstaben gleich:

$$2 + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}; \quad a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{(ac) + b}{c};$$

$$2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{4}; \quad a\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}.$$

Nachdem wir uns mit den allgemeinen Bruchregeln wieder vertraut gemacht haben, wollen wir uns jetzt mit der Division von gerichteten Zahlen beschäftigen.

Der Praktiker: Es ist ganz gut, daß Sie mir erst einmal die Regeln der Bruchrechnung wieder ins Gedächtnis zurückgerufen haben. Ich hatte doch schon vieles vergessen.

Der Ingenieur: Die Divisionsregel entspricht völlig der Multiplikationsregel:

a) Haben algebraische Zahlen (= gerichtete Zahlen) gleiche Vorzeichen, so wird bei einer Division das Vorzeichen immer positiv (+), haben sie ungleiche Vorzeichen, so wird der Quotient immer negativ (–).

Beispiele: $\frac{(a)}{(b)} = \frac{a}{b}$; $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$; $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$; $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.

b) Soll eine algebraische Summe oder Differenz durch eine Zahl dividiert werden, so wird jedes einzelne Glied der Summe (Differenz) durch diese Zahl dividiert.

Beispiele: $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$; $\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$; $\frac{a+b}{-c}=\frac{a}{-c}+\frac{b}{-c}=-\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$; $\frac{8a+4ab-16ac}{4a}=2+b-4c$.

c) Soll eine algebraische Summe oder Differenz durch eine andere Summe oder Differenz dividiert werden, so löst man erst die Additions- bzw. die Subtraktionsaufgabe des Zählers und des Nenners und dividiert dann Zähler und Nenner in der üblichen Weise.

Beispiele: $\frac{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{10+12}{15}}{\frac{10}{15}}=\frac{22}{15}\cdot\frac{15}{10}=\frac{11}{5}=2{,}2$

$$\frac{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{12-10}{15}}{\frac{2}{3}}=\frac{2}{15}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{\frac{2}{3}-\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{10-12}{15}}{\frac{2}{3}}=-\frac{2}{15}\cdot\frac{3}{2}=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{\frac{a+b}{3}}{\frac{4}{4}}=\frac{4}{3}(a+b);\quad \frac{\frac{a+b}{a}}{\frac{b}{b}}=\frac{b}{a}(a+b)=\frac{b(a+b)}{a}=b+\frac{bb}{a}$$

Man kann auch anders vorgehen, indem man die einzelnen Zahlen, Summen oder Differenzen des Zählers einzeln durch den Nenner dividiert. In diesem Falle wäre der Gang in der dritten Aufgabe folgender:

$$\frac{\frac{2}{3}-\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}}=\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}\right)-\left(\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}}\right)=\left(\frac{2\cdot3}{3\cdot2}\right)-\left(\frac{4\cdot3}{5\cdot2}\right)=1-\frac{6}{5}=-\frac{1}{5}$$

Eine andere Aufgabe: $\frac{\frac{4}{5}+\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}\quad\frac{2}{3}}=\frac{\frac{22}{15}}{\frac{2}{15}}=\frac{22\cdot15}{15\cdot2}=11$

Weiteren Divisionsaufgaben werden wir im Laufe der Zeit vielfach begegnen. Bei der Lösung müssen wir uns immer vor Augen halten,

daß durch Umkehrung des Bruches die Divisionsaufgabe in eine Multiplikationsaufgabe verwandelt wird, und daß bei Zusammentreffen von gleichen Zeichen immer Plus entsteht, bei Zusammentreffen ungleicher Zeichen Minus.

Der Praktiker: Ich glaube, die letzten Divisionsaufgaben waren ein bißchen zu viel. Mir brummt ordentlich der Schädel von so vielem Rechnen.

Der Ingenieur: Wenn man sich die Dinge richtig überlegt, ist alles halb so schlimm. Um Sicherheit bei solchen Aufgaben zu erreichen, muß man möglichst viele Beispiele durchexerzieren.

Wir wollen im Anschluß hieran noch einige gemischte Aufgaben betrachten. Was würden Sie z. B. mit einer solchen Aufgabe anfangen:

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}}{-\frac{a}{b}}\ ?$$

Der Praktiker: Wenn ich durch einen Bruch dividieren will, so muß ich mit seinem reziproken Wert multiplizieren. Also

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}}{-\frac{a}{b}}=-\frac{b}{a}\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)=-\frac{ab}{ab}+\frac{bc}{ad}.$$

Der Ingenieur: Soweit ist es richtig. Sie können aber noch weiter rechnen.

Der Praktiker: Ja, ich kann noch „ab" gegeneinander kürzen. Aber was kommt denn da heraus? Da bleibt ja nur der Minusstrich übrig!

Der Ingenieur: Setzen Sie einmal Ziffern an Stelle der Buchstaben. Dann werden Sie leicht dahinterkommen. a soll 3, b soll 5 sein. Dann ergibt sich $-\frac{3\cdot 5}{3\cdot 5}=-\frac{3}{3}=-\frac{1}{1}=-1$. Genau so ergibt $-\frac{ab}{ab}=-1$.

Der Praktiker: Dann wäre das Endergebnis also folgendes:

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}}{-\frac{a}{b}}=\frac{bc}{ad}-1.$$

Der Ingenieur: Richtig! Nun rechnen Sie einmal aus:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\quad\text{und}\quad\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

Der Praktiker: Es ist $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}=\frac{a+b}{a\cdot b}$;

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b}{ab}-\frac{a}{ab}=\frac{b-a}{ab};$$

Der Ingenieur: Auch das stimmt! Kommt Ihnen diese Rechnung nicht bekannt vor?

Der Praktiker: Doch! Ist nicht die Berechnung zweier parallel geschalteter Widerstände so ähnlich?

Der Ingenieur: Nicht nur ähnlich, sondern genau so! Sie brauchen nur an Stelle von a R_1 und an Stelle von b R_2 zu setzen. Will man den Gesamtwert zweier parallel geschalteter Widerstände wissen, so braucht man nur die Leitwerte, d. h. die reziproken Werte der Widerstände, zu addieren: $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_x}$. Den ausgerechneten Leitwert wandelt man wieder in seinen reziproken Wert, den Widerstand, zurück.

Man kann den resultierenden Widerstand auch nach der Formel $\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = R_x$ berechnen. Die Überleitung der einen Methode in die andere haben wir soeben vorgenommen. Denn wir haben gefunden:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_x}; \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_2 \cdot R_1}.$$

Damit ist $\frac{R_2 + R_1}{R_2 \cdot R_1} = \frac{1}{R_x}; \quad R_x = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$.

Der Praktiker: Ja, diese Formel ist mir auch geläufig. Ich weiß nur immer nicht, was dabei über und was unter den Bruchstrich kommt.

Der Ingenieur: Das ist leicht zu merken. Wir kennen schon die Regel: die höhere Rechnungsart geht vor. Also erst die Multiplikation, und dann, unter dem Bruchstrich, die Addition.

Kommt nun auch die andere Form $\frac{b - a}{ab}$ in der Praxis vor?

Der Praktiker: Ich kenne eigentlich keinen solchen Fall.

Der Ingenieur: Diese Formel ist auch sehr wichtig! Wenn Sie z. B. einen bestimmten Widerstand R_1 zur Hand haben, der für Ihre Zwecke zu groß ist, und Sie wollen wissen, welchen Widerstand R_x Sie parallel schalten müssen, um den gewünschten Widerstand R_n zu erhalten, so müssen Sie diese Formel anwenden. Ein Beispiel wieder: Vorhanden ist $R_1 = 30\ k\Omega$, gebraucht wird $R_n = 7{,}5\ k\Omega$. Gesucht wird die Größe des zweiten, parallel zu schaltenden Widerstandes R_x.

Es ist $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_n} = \frac{1}{R_x}; \quad R_x = \frac{R_1 \cdot R_n}{R_1 - R_n} = \frac{30\,000 \cdot 7\,500}{30\,000 - 7\,500} = \frac{225\,000\,000}{22\,500} =$ 10 000 Ohm. Es ist also $R_x = 10\ k\Omega$.

Der Praktiker: Jetzt sind mir die Dinge bedeutend klarer geworden. Dieselben Formeln gelten doch wohl auch für die Berechnung von Spulen und Kondensatoren? Ich kann da immer nicht behalten, ob man bei Spulen oder bei Kondensatoren so rechnet wie bei Widerständen.

Der Ingenieur: Sie brauchen sich nur die Formeln für Wechselstromwiderstände vor Augen zu halten, um das zu begreifen. Wenn man

zwei ohmsche Widerstände hintereinandergeschaltet, so ist der Gesamtwiderstand $R_1 + R_2 = R_x$. Der Widerstand einer Spule, oder vielmehr einer Selbstinduktion, ist ωL. Entsprechend ergibt sich bei Hintereinanderschaltung zweier Selbstinduktionen: $\omega L_1 + \omega L_2 = \omega L_x$, und damit $L_1 + L_2 = L_x$. Selbstinduktionen verhalten sich also genau so wie ohmsche Widerstände. — Der Widerstand einer Kapazität ist $\frac{1}{\omega C}$. Entsprechend ist bei Hintereinanderschaltung zweier Kapazitäten $\frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{\omega C_x}$ und damit $\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_x}$. Das ist aber dieselbe Formel wie bei Parallelschaltung zweier ohmscher Widerstände. Kapazitäten verhalten sich also entgegengesetzt wie ohmsche Widerstände und Selbstinduktionen. Deshalb gibt man auch kapazitiven Widerständen ein Minus-Vorzeichen, ohmschen Widerständen und induktiven Widerständen dagegen ein Plus-Vorzeichen. Bei Parallelschaltung ist es dementsprechend.

Bei Selbstinduktionen muß man die Kehrwerte addieren, also bei $L_1 \,||\, L_2$ (sprich: L_1 parallel zu L_2): $\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} = \frac{1}{L_x}$, während bei Kondensatoren einfach die Kapazitäten addiert werden: $C_1 \,||\, C_2 = C_1 + C_2 = C_x$. Da der Kehrwert von $\frac{1}{\omega C}$ einfach ωC ist, ergibt sich bei Parallelschaltung $\omega C_1 + \omega C_2 = \omega C_x$ und gekürzt $C_1 + C_2 = C_x$.

Der Praktiker: Diese Erklärung leuchtet mir ein. Ich glaube, jetzt werde ich es behalten.

5. Stunde:
Die Grundlagen der Algebra V

Zusammenfassung der Bruchregeln — Der Dezimalbruch — Auf die Stellenzahl achten! — Reziproke Zahlen — Durchgriff und Verstärkungsfaktor — Leitfähigkeit und Widerstand — Eine Gleichung wird umgeformt — Resonanzschärfe — Dämpfungsverhältnis d — Die Indexbezeichnung.

Der Ingenieur: Bevor wir zum Dezimalbruch übergehen, wollen wir noch einmal die Bruchregeln rekapitulieren. Ich weiß, daß gerade sie immer wieder verwechselt werden.

Der Praktiker: Mir ging es in der vorigen Stunde so. Da kam doch in einer Aufgabe als Zwischenlösung $-\frac{2}{15} \cdot \frac{3}{2}$ vor. Ich wußte da nicht, ob ich Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplizieren muß oder ob ich über Kreuz multiplizieren soll.

Der Ingenieur: Die Grundregeln müssen schon sitzen. Bei der Multiplikation von Brüchen wird Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert. Bei der Division kehrt man den zweiten Bruch um und multipliziert dann beide Brüche miteinander. Bei der Addition und

bei der Subtraktion macht man zunächst beide Brüche gleichnamig, indem man die Nenner miteinander multipliziert und dann den Zähler des einen Bruches mit dem Nenner des anderen Bruches (also über Kreuz) multipliziert. Die so erhaltenen neuen Zähler werden miteinander addiert bzw. voneinander subtrahiert. Addition und Multiplikation von Brüchen muß man schon auseinanderhalten. Das muß sitzen.

Außer den gemeinen Brüchen gibt es noch Dezimalbrüche. Dezimalbrüche können nur durch Zahlen ausgedrückt werden, sie können sowohl positive als auch negative Werte haben. Der Dezimalbruch ist gewissermaßen der ausgerechnete gemeine Bruch. Will ich z. B. den gemeinen Bruch ¾ in einen Dezimalbruch verwandeln, so teile ich 3 durch 4. 3 : 4 = 0,75. Der Zähler wird also einfach durch den Nenner dividiert.

Die Addition und die Subtraktion von Dezimalbrüchen ist leicht. Man behandelt sie wie ganze Zahlen und schreibt sie untereinander, wobei man nur darauf zu achten braucht, daß Komma unter Komma kommt. Es ist z. B. $0{,}75 + 0{,}45 = \begin{array}{r} 0{,}75 \\ +\ 0{,}45 \\ \hline = 1{,}20 \end{array}$ und $0{,}75 - 0{,}45 = \begin{array}{r} 0{,}75 \\ -\ 0{,}45 \\ \hline = 0{,}30 \end{array}$. Will man einen Dezimalbruch mit einer ganzen Zahl oder mit einem anderen Dezimalbruch multiplizieren, so multipliziert man zunächst so, als ob es sich um ganze Zahlen handelt. Nach durchgeführter Rechnung streicht man die Stellenzahl (hinter dem Komma) beider ursprünglichen Zahlen ab.

Der Praktiker: Darunter kann ich mir nichts vorstellen.

Der Ingenieur: Zwei Beispiele mögen das klarmachen: $6 \cdot 0{,}75 = 4{,}50$; $0{,}06 \cdot 0{,}75 = 0{,}0450$.

Will man Dezimalbrüche untereinander dividieren, oder will man eine ganze Zahl durch einen Dezimalbruch dividieren, so muß man den Divisor in eine ganze Zahl verwandeln, indem man Dividend und Divisor mit einer entsprechenden Größe gemeinsam multipliziert.

Beispiele: $0{,}75 : 0{,}25 = 75 : 25 = 3$;
$12 : 0{,}8 = 120 : 8 = 15$.

Der Praktiker: Sie sagten vorhin, daß Dezimalbrüche nur durch Zahlen ausgedrückt werden können. Demnach gibt es keine Dezimalbrüche mit allgemeinen Zahlen?

Der Ingenieur: Nein, die gibt es nicht. Das ist auch erklärlich. Ich habe vorhin gesagt, daß der Dezimalbruch der ausgerechnete gemeine Bruch ist. Einen gemeinen Bruch aus allgemeinen Zahlen können Sie aber nicht weiter ausrechnen. $\frac{a}{b}$ ist und bleibt a : b; da kommt nie etwas anderes heraus. Infolgedessen kann es auch keinen Dezimalbruch bei allgemeinen Zahlen geben.

Eine Sonderstellung nimmt die Division ein, wenn der Dividend, also der Zähler, eine „eins" ist. Bei der Division der eins durch andere

Zahlen entstehen „Kehrwerte" oder „Reziproken". Die reziproke Zahl von 4 ist $1:4=\frac{1}{4}$; die reziproke Zahl von 17 ist $1:17=\frac{1}{17}$. Ist Ihnen der Ausdruck „reziprok" schon einmal in der Praxis begegnet?

Der Praktiker: Gewiß, man sagt z. B., daß der Verstärkungsfaktor μ der reziproke Durchgriff ist.

Der Ingenieur: Das stimmt! Es ist $\mu=\frac{1}{D}$. Beim Durchgriff ist aber zu beachten, daß er gewöhnlich in Prozenten angegeben ist. Es ist $20\,\%=20$ v. H. $=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}=0{,}2$; $25\,\%=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}=0{,}25$. μ wäre in diesen beiden Fällen $\frac{1}{0{,}2}=5$ bzw. $\frac{1}{0{,}25}=4$.

Die reziproken Werte spielen in der Praxis eine große Rolle. So ist die Leitfähigkeit gleich dem reziproken Widerstand: Leitfähigkeit $=\frac{1}{R}$. Es wird noch viel zu wenig mit der Leitfähigkeit (deren Einheit das Siemens ist, $S=\frac{1}{\Omega}$) gerechnet, und doch würde hierdurch manche Rechnung vereinfacht werden. Die einfachste Anwendung ist bereits bei der Parallelschaltung von Widerständen gegeben. Bei Hintereinanderschaltung von Widerständen addieren sich die Werte der Widerstände, bei Parallelschaltung die Werte der Leitfähigkeiten.

B e i s p i e l e: Zwei Widerstände von je 1000 Ω sind parallel zu schalten: $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$. Es ist also $\frac{1}{R}=\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000}=\frac{2}{1000}=$ $=\frac{1}{500}$, R ist also $=500\,\Omega$.

Oder es ist ein Widerstand von 2000 Ω mit einem Widerstand von 500 Ω parallel zu schalten. Es ist $\frac{1}{R}=\frac{1}{2000}+\frac{1}{500}=\frac{1}{2000}+\frac{4}{2000}=$ $=\frac{5}{2000}=\frac{1}{400}$, R ist also gleich 400 Ω.

Der Praktiker: Das verstehe ich nicht ganz. Wir haben $\frac{1}{R}$, also die Leitfähigkeit berechnet. Wieso kommt jetzt mit einem Male wieder R, der Widerstand, heraus?

Der Ingenieur: Wir hatten die Gleichung $\frac{1}{R}=\frac{1}{500}$. Man kann in einer Gleichung eine Zahl auf die andere Seite bringen, wenn man mit ihr die umgekehrte Rechenoperation vornimmt. Aus der Division wird dann also eine Multiplikation, aus der Multiplikation eine Division; aus der Addition wird eine Subtraktion, aus der Subtraktion eine Addition.

B e i s p i e l e: $\frac{2}{500}=\frac{8}{2000}$; $2=500\cdot\frac{8}{2000}=\frac{500\cdot 8}{2000}$;

$$2 \cdot 50 = \frac{700}{7};\quad 2 = \frac{700}{50 \cdot 7};\quad 15 - 3 = 5 + 7;\ 15 = 5 + 7 + 3;$$

$$18 + 7 = 5 \cdot 5;\ 5 = \frac{18 + 7}{5};\ 18 = (5 \cdot 5) - 7.$$

Der Praktiker: Wie ist es nun, wenn ich in der Gleichung $5 = \frac{18 + 7}{5}$ die 7 auf die andere Seite bringen will? Da käme ja dann heraus $5 - 7 = \frac{18}{5}$. Das stimmt doch nicht!

Der Ingenieur: Das stimmt auch nicht! Es ist ja nicht $5 = \frac{18}{5} + 7$, sondern $= \frac{18+7}{5} = \frac{18}{5} + \frac{7}{5}$. Man muß also nicht die 7, sondern $\frac{7}{5}$ auf die andere Seite bringen. Dann sieht es schon wesentlich anders aus. Es wäre: $5 = \frac{18 + 7}{5} = \frac{18}{5} + \frac{7}{5}$, $5 - \frac{7}{5} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5} = 3{,}6$.

Um nun auf das Verhältnis der Leitfähigkeit zum Widerstand zurückzukommen, so ist, wenn $\frac{1}{R} = \frac{1}{500}$, $1 = \frac{1 \cdot R}{500}$, $1 \cdot 500 = 1 \cdot R$ $R = 500\ \Omega$.

Für Kehrwert oder reziproke Größe kann man auch Inversion sagen. So ist die Resonanzschärfe $\varrho = \frac{\omega L}{r}$ die Inversion oder der reziproke Wert des Dämpfungsverhältnisses $d = \frac{r}{\omega L}$. Es ist demnach $\varrho = \frac{1}{d}$ und $d = \frac{1}{\varrho}$.

Der Praktiker: Vorhin sagten Sie $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Erläutern Sie doch bitte einmal näher die Bedeutung der tiefstehenden 1 und 2.

Der Ingenieur: Wir hatten früher die Buchstaben a, b und c... benutzt. Ebensogut kann man auch, wie wir es jetzt gemacht haben, mit dem Symbol des Schaltelements selbst rechnen. Zur Unterscheidung fügt man dann eine tiefstehende Ziffer, Index (Mehrzahl: Indices) genannt, an. Deshalb kann man z. B. bei der Berechnung von hintereinandergeschalteten Widerständen sagen: $R_1 + R_2 = R$ statt $a + b = x$. Ausgesprochen wird das: R eins plus R zwei gleich R. Werden solche normalen Ziffern (meist fälschlich arabische Ziffern[1]) genannt) als Index verwendet, so handelt es sich immer um dieselbe Art des Symbols, nur die Werte sind verschieden. Will man dagegen verschiedene Arten ausdrücken, so muß man lateinische Ziffern als Index nehmen. Z. B. ist $S = S_I$ die erste Ableitung der I_a-U_g-Kenn-

[1]) Von den Arabern wurde die Null und damit das Dezimalsystem übernommen. Deshalb ist es berechtigt, von einem arabischen Zahlensystem zu sprechen. Arabische Ziffern selbst benutzen wir aber nicht, die sehen ganz anders aus: ١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩, ٠ Nicht nur die Araber, sondern auch die Türken schreiben mit arabischen Ziffern, wir aber nicht!

linie, S_{II} die zweite Ableitung, S_{III} die dritte Ableitung. Diese Art der Bezeichnung schafft also ein neues Symbol, sagt aber nichts über die Werte, sondern zeigt nur die Verwandtschaft untereinander auf. Genau dasselbe besagt es, wenn hochstehende Striche angefügt werden, also $S' = S_I$, $S'' = S_{II}$, $S''' = S_{III}$. (Ausgesprochen: S-Strich oder S-Akut, S zwei Strich, S drei Strich).

Der Praktiker: Ich habe doch auch schon hochstehende Ziffern gesehen. Kann man die auch hierfür nehmen, oder bedeuten sie etwas anderes?

Der Ingenieur: Hochstehende Ziffern darf man unter keinen Umständen für diesen Zweck verwenden. Sie bedeuten etwas ganz anderes, sie kennzeichnen eine Potenz. Doch darüber wollen wir uns in der nächsten Stunde unterhalten.

6. Stunde:
Von Potenzen und Wurzeln I

Die Potenzbezeichnung – Versatzbezeichnungen – Was ist eine Größenordnung? – Vorsatzbezeichnungen für Dezimalbrüche – Nicht liederlich sein! – Das Mikron – m^2 und m^3 – Was ist $10^{0?}$ – Die „x", der ruhende Pol – Die Welt der negativen Exponenten.

Der Ingenieur: Heute wollen wir uns über hochstehende Ziffern, über Potenzen, unterhalten. – Unter einer Potenz versteht man, daß die angegebene Grundzahl so oft mit sich selbst multipliziert werden soll, wie die hochgestellte Zahl, der Exponent, angibt. Es ist also $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$, $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$, $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$. Weiter ist $\pi^2 = 3{,}14 \cdot 3{,}14 = 9{,}87$, $\frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{9{,}87} = 0{,}1013$ usw.

Und entsprechend ist $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$, $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$. Für 3000 Ω (dreitausend Ohm) z. B. kann man auch sagen: $3 \cdot 10^3$ Ω (dreimal zehn hoch drei Ohm) oder auch 3 kΩ (drei Kiloohm). Für die Bezeichnung von Dezimalstellen ist es allgemein üblich geworden, die Potenzbezeichnung anzuwenden, da man hiermit ein klareres, übersichtlicheres Bild erhält:

10	= Zehn	= 10^1	= D	= deka
100	= Hundert	= 10^2	= h	= hekto
1 000	= Tausend	= 10^3	= k	= kilo
1 000 000	= Million	= 10^6	= M	= mega
1 000 000 000	= Milliarde	= 10^9	= G	= giga
1 000 000 000 000	= Billion	= 10^{12}	= T	= tera

Also ein Hektoliter = 1 hl ist gleich 100 Liter; ein Kiloohm = 1 kΩ sind 1000 Ohm, ein Megahertz = 1 MHz sind eine Million Hertz.

Nicht nur ganze Zahlen, sondern auch Dezimalbrüche kann man auf diese Art bezeichnen. Während $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$ sind, ist $0{,}01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$, $0{,}001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$. Der Exponent erhält

einfach ein negatives Vorzeichen. Für 10^{-2} könnte man auch sagen: $0{,}1^2$, denn $0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01 = 10^{-2}$. Das ist aber ungebräuchlich. Entsprechend wäre $0{,}01^2 = 0{,}01 \cdot 0{,}01 = 0{,}0001 = 10^{-4}$.

Der Praktiker: Dann kann man einen Dezimalbruch ja auf 4 verschiedene Arten bezeichnen: als Dezimalbruch, als gemeinen Bruch, als Potenzbezeichnung mit negativem Exponenten und als Dezimalbruch mit positivem Exponenten!

Der Ingenieur: Ja, gewiß. Und immer ist es dasselbe! — Für das Fortschreiten 10, 100, 1000 hat man auch die Bezeichnung Größenordnung. Wenn es heißt, daß ein Wert um zwei Größenordnungen größer ist als ein anderer (fälschlich auch um zwei Dekaden größer), und der ursprüngliche Wert ist 100, so besagt das, daß der neue Wert 10 000 ist, also zwei Nullen mehr hat. Und entsprechend wäre drei Größenordnungen kleiner als 10 000: drei Nullen weniger, also 10.

Auch für Dezimalbrüche hat man Vorsatzbezeichnungen geschaffen. Man kann Dezimalbrüche auf folgende Arten bezeichnen:

0,1	$= {}^1/_{10}$	$= 10^{-1}$	= d	= dezi
0,01	$= {}^1/_{100}$	$= 10^{-2}$	= c	= centi
0,001	$= {}^1/_{1000}$	$= 10^{-3}$	= m	= milli
0,000 001	$= {}^1/_{1\,000\,000}$	$= 10^{-6}$	= µ	= mikro
0,000 000 001	$= {}^1/_{1\,000\,000\,000}$	$= 10^{-9}$	= n	= nano
0,000 000 000 001	$= {}^1/_{1\,000\,000\,000\,000}$	$= 10^{-12}$	= p	= pico

Für pico sagte man früher auch µµ (mikromikro oder mymy). Es sind also 3 µH = 3 millionstel Henry, 10 pF = 10 billionstel Farad oder der hundertste Teil eines milliardstel Farad.

Der Praktiker: 1 Mikrofarad würde demnach 1 µF zu schreiben sein. Nun findet man doch manchmal in Katalogen usw. auch 1 MF oder 1 Mf geschrieben.

Der Ingenieur: Das ist regelrecht falsch. 1 MF würde 1 Megafarad bedeuten. Sie wissen ja, 1 µF ist schon eine große Kapazität. 1 MF aber wäre eine Billion mal größer! Das ist unvorstellbar. In Wirklichkeit ist aber immer 1 Mikrofarad gemeint. In Büchern und Zeitschriften finden Sie die Schreibweise wohl immer richtig.

An diesem Beispiel ersieht man gerade den Segen der Normung. Wären die Abkürzungen nicht genormt, so würde jeder schreiben wie er will, und niemand würde wissen, was nun eigentlich gemeint ist. M und µ haben ja einen weiten Abstand voneinander, so daß man aus der Verwendung schon den richtigen Schluß ziehen könnte. Aber bedenken Sie einmal z. B., daß die Abkürzungen d und D nur zwei Größenordnungen auseinander sind. Da wären Verwechslungen an der Tagesordnung, wenn man sich nicht genau an die genormten Abkürzungen halten würde.

Der Praktiker: Sie haben gesagt, daß $\mu = 10^{-6}$. Nun habe ich aber seinerzeit in der Fachschule gelernt, daß µ = mikron ist und ein

tausendstel Millimeter bedeutet, also nicht ein millionstel. Das ist doch auch genormt! Wie reimt sich denn das zusammen?

Der Ingenieur: Gewiß, μ bedeutet auch Mikron. Die Einheit des Längenmaßes ist aber nicht das Millimeter, sondern das Meter. Und ein Mikron ist ein millionstel Meter. Eigentlich sind die Ausdrücke μ = Mikron unkorrekt. Nach den DIN-Normen heißt es μm = Mikrometer und nicht Mikron. Man spricht ja auch von einer Mikrometerschraube. Der Ausdruck Mikron ist aber noch stark gebräuchlich.

Der Praktiker: Dann bedeutet also mμm = Millimikrometer 10^{-9} m. Nun noch eine Frage. Man findet manchmal für qm die Bezeichnung m^2. Wieso das?

Der Ingenieur: Ein Quadratmeter = 1 qm ist ein Meter lang und ein Meter breit, also $m \cdot m = m^2$. Entsprechend auch km^2. 1 Kubikmeter ist dazu noch 1 Meter hoch, also $m \cdot m \cdot m = m^3$ usw. Die Abkürzungen qm, qkm usw. sind zwar auch noch gebräuchlich, aber veraltet. Nach den DIN-Normen 1301 heißt es nur m^2, cm^2, km^2, m^3, cm^3, km^3 usw.

Der Praktiker: Die Vorsatzbezeichnungen mit positiven Exponenten fangen mit 10^1 und die mit negativen Exponenten mit 10^{-1} an. Nun gibt es doch auch 10^0. Ich habe neulich gelesen $10^0 = 1$. Das kann ich eigentlich nicht begreifen.

Der Ingenieur: Ja, das stimmt auch. Wir müssen uns vor Augen halten, daß auch die Potenzen mit negativen Exponenten keine negativen Zahlen sind, sondern positive Zahlen (sofern vor der Grundziffer nicht noch besonders ein Minuszeichen steht). Es ist $10^3 = 1000$, $10^2 = 100$, $10^1 = 10$, $10^{-1} = 0{,}1$, $10^{-2} = 0{,}01$, $10^{-3} = 0{,}001$. Die Exponenten ändern sich also immer um 1, wenn die Zahl selbst sich um eine Größenordnung geändert hat. 10^1 und 10^{-1} sind um zwei Größenordnungen auseinander. Dazwischen liegt 10^0. Größenordnungsmäßig zwischen 10 und 0,1 liegt 1. Dementsprechend ist $10^0 = 1$. Das trifft aber nicht nur auf die 10 als Grundzahl zu, sondern auch auf jede andere Zahl. Jede nullte Potenz ist 1. Also ist auch $a^0 = 1$.

Der Praktiker: Diese Erklärung ist einleuchtend. Rein rechnungsmäßig konnte ich das bisher eigentlich nicht begreifen.

Der Ingenieur: Wie verhält es sich nun wohl mit Potenzen von Null und Eins?

Der Praktiker: Wenn man null mit null multipliziert, kann doch wieder nur eine Null herauskommen, gleichgültig, wie oft man das macht. Und wenn man eins mit eins multipliziert, so kommt wieder eine Eins heraus, gleichgültig, wie oft man das macht.

Der Ingenieur: Sehr richtig. Man kann also sagen: $0^n = 0$, $1^n = 1$. Wieviel ist nun aber $(-1)^4$ und $(-1)^5$?

Der Praktiker: Das muß man ausrechnen. $(-1)^4$ ist gleich $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$. Da gleiche Vorzeichen + ergeben, ist $(-1) \cdot (-1) = 1$. Es ist also $(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 = 1$. Und $(-1)^5$ ist gleich $(-1) \cdot (-1)^4 = (-1) \cdot 1 = -1$. Habe ich richtig gerechnet?

Der Ingenieur: Jawohl, Sie haben diese Aufgabe völlig richtig gelöst. Man kann hieraus also die Regel ableiten: $(-1)^{2n} = 1$, $(-1)^{2n+1} = -1$, $(-1)^{2n-1} = -1$. Sehen Sie, so können wir aus den von Ihnen ausgerechneten Beispielen gleich einige allgemein gültige Rechenregeln ableiten.

Beim Potenzrechnen muß man vielfach etwas anders denken lernen. Wenn Sie sich nach der bisherigen Rechnungsart die Zahlen um 1 fortschreitend und auf einer geraden Linie aufgetragen vorstellen, so schreiten die Zahlen linear vorwärts. Ein Beispiel hierfür ist das in Bild 3 gebrachte I_a-U_g-Diagramm. Vom Nullpunkt aus schreitet nach rechts die positive Gitterspannung, nach links die negative Gittervorspannung. Tragen Sie dagegen die Potenzen auf einer geraden Linie auf, so müssen Sie feststellen, daß es da überhaupt keinen Nullpunkt gibt. Der Nullpunkt liegt gewissermaßen in der Unendlichkeit. Der ruhende Pol ist nicht die Null, sondern die $10^0 = 1$. Während beim normalen Rechnen und bei normaler linearer Skala der Abstand zwischen 0 und 1 ebenso groß ist wie zwischen 1 und 2, ist bei der Potenzrechnung und logarithmischen Skala der Abstand zwischen 1 und 2 ($1 \cdot 10^0 \ldots 2 \cdot 10^0$) klein, zwischen 1 und 0 dagegen ungeheuer groß. Da liegt gewissermaßen noch einmal eine ganze Zahlenwelt, die Welt der Bruchzahlen, von $10^0 \ldots 10^{-\infty}$[1]. Diese Zahlenwelt der negativen Exponenten ist ebenso groß wie die der positiven Exponenten!

Der Praktiker: Die Bruchzahlen, und damit die Welt der negativen Exponenten, liegen doch eigentlich nicht nur zwischen 1 und 0, sondern auch zwischen allen andern Zahlen, also zwischen 1 und 2, 2 und 3 usw.

Der Ingenieur: Das stimmt schon. Dort haben sie aber nicht die Bedeutung. Wie groß muß denn schon die Genauigkeit sein? Bei Messungen bis auf 0,1 % höchstens (= 10^{-3}), bei Widerständen, Strömen, Spannungen usw. bis auf 10^{-2}, bei Frequenzen im Dezimetergebiet (als Spitzenleistung) bis auf 10^{-1}. Beim Rechnen selbst auch nur bis auf höchstens 4 bis 5 Dezimalstellen. Größere Anforderungen werden für Zahlen größer als 1 doch nicht gestellt. Bei Zahlen von 1 bis 0 dagegen geht es nicht nur bis 10^{-3}, sondern viel weiter herunter. Gitter–Anode–Kapazitäten bei Pentoden z. B. haben die Größe von 10^{-15} F. Die Welt der negativen Exponenten dehnt sich in der Praxis also in erster Linie zwischen 0 und 1 aus. Das beweist ja auch die logarithmische Skala.

---

[1] ∞ = unendlich.

7. Stunde:
Von Potenzen und Wurzeln II

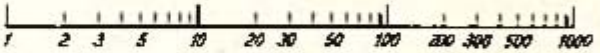
Logarithmische Skala – Logarithmisches Papier – Selbstherstellung logarithmischer Skalen – Ein Strich ging verloren – Das Wesen der Potenzen – Wieder eine höhere Sprosse.

Der Praktiker: Was ist denn eine logarithmische Skala?

Der Ingenieur: Bei einer logarithmischen Skala werden, von links nach rechts fortschreitend, in jedem Abschnitt zehnmal mehr Zahlen umschlossen als im vorhergehenden Abschnitt. Ist auf dieser Skala z. B. der Abschnitt 1...10 genau 5 cm lang, so liegen in den folgenden 5 cm die Zahlen 10...100, in den nächsten 5 cm die Zahlen 100...1000 usw. Trägt man die Potenzen auf eine gerade Linie auf, so daß die Exponenten linear fortschreiten, so ergibt sich eine Teilung gemäß **Bild 4.**

Eine solche Einteilung nennt man logarithmisch.

Bild 4. Die logarithmische Skala



Der Praktiker: Deshalb spricht man wohl auch von logarithmischem Papier!

Der Ingenieur: Ja, zur Herstellung von Kennlinienfeldern, Diagrammen usw. gebraucht man Papier, das nicht nur von waagerechten, sondern auch von senkrechten Linien durchzogen ist. Haben diese Linien gleichen Abstand, etwa in je einem Millimeter Abstand eine Linie (Millimeterpapier), und zwar sowohl senkrecht als auch waagerecht, so spricht man von doppelt-linearem Papier. Ist dagegen die eine Einteilung, etwa die senkrechte, linear, die andere, in unserem Fall die waagerechte, dagegen logarithmisch, so spricht man von linear-logarithmischem oder halblogarithmischem Papier. Ist die Einteilung in beiden Richtungen, sowohl senkrecht als auch waagerecht, logarithmisch, so hat man doppelt-logarithmisches Papier vor sich. Kennen Sie Beispiele, wo man halblogarithmisches Papier verwendet?

Der Praktiker: Ja, bei den Kennlinienfeldern der Regelröhren (I_a-U_{g1}- und S-U_{g1}-Kennlinienfelder – **Bild 5**). Aber dazu noch eine Frage. Wir haben jetzt nur den Sprung von einer Größenordnung zur anderen gehabt. Wie aber bezeichnet man die Zwischenwerte?

Der Ingenieur: Nehmen wir gleich ein praktisches Beispiel. Die Geschwindigkeit der elektrischen Wellen beträgt 300 000 km/s oder 300 000 000 m/s. In Zehnerpotenzen ausgedrückt sind das $3 \cdot 10^8$ m/s. Man macht also eine Multiplikationsaufgabe daraus. Auf diese Art

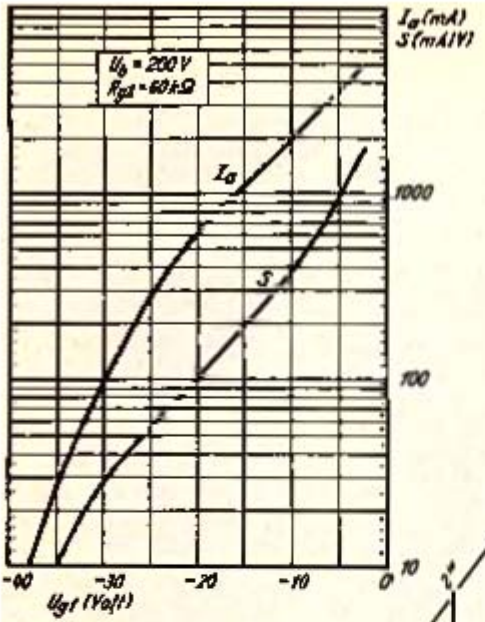


Bild 5. Beispiel eines Diagramms mit halblogarithmischem Netz

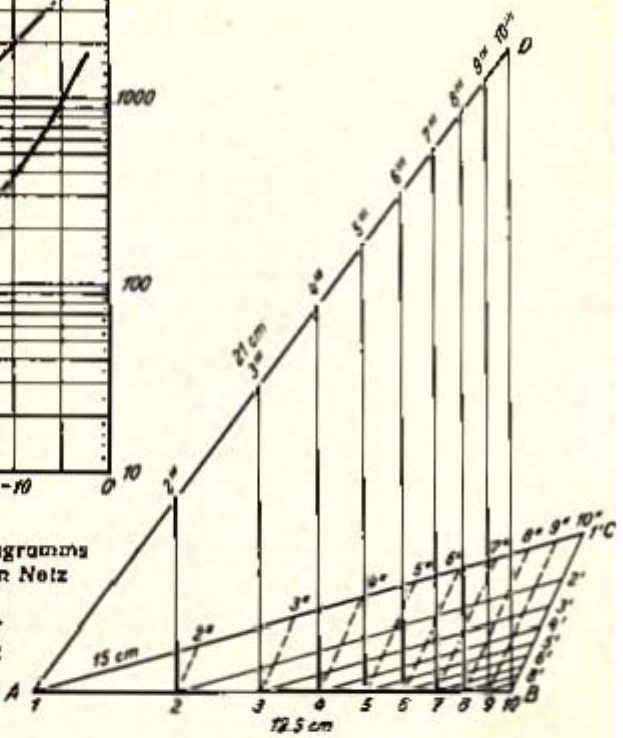


Bild 6. Herstellung einer logarithmischen Teilung auf grafischem Wege B...C = 4,4 cm

kann man jede Zahl ausdrücken. Für 2500 Ω oder 2,5 kΩ kann man also sagen: $2{,}5 \cdot 10^3$ Ω. Diese Beispiele dürften wohl die Dinge klarstellen.

Der Praktiker: Beim logarithmischen Papier ist der Abstand der Unterteilung doch nicht gleichmäßig. Wie kann ich mir, sagen wir von 5 cm, eine logarithmische Einteilung herstellen?

Der Ingenieur: Bei einer logarithmischen Einteilung von 1 cm je Größenordnung ist also der Abstand von 1...10 genau 1 cm. Der Abstand von 1...2 ist dabei 0,301 cm, von 1...3: 0,477 cm, von 1...4: 0,602 cm, von 1...5: 0,699 cm, von 1...6: 0,778 cm, von 1...7: 0,845 cm, von 1...8: 0,903 cm, von 1...9: 0,954 cm, von 1...10: 1 cm. Soll der Abstand von 1...10 nun 5 cm sein, so sind die genannten Zahlen mit 5 zu multiplizieren. Auf diese Art kann man jederzeit jede gewünschte logarithmische Einteilung herstellen.

Der Praktiker: Ich habe einmal gehört, daß es auch eine einfache grafische Methode zur Herstellung beliebiger logarithmischer Einteilungen geben soll, ohne jede Umrechnung.

Der Ingenieur: Jawohl, die gibt es. Diese Methode ist besonders dann angebracht, wenn eine Strecke logarithmisch unterteilt werden soll, die nicht auf volle Zentimeterlängen ausläuft. Zu diesem Zweck überträgt man irgendeine vorhandene logarithmische Teilung auf eine Gerade und setzt an einem Endpunkt eine Strecke von der gewünschten Länge an. Dann verbindet man die beiden anderen Punkte und zieht dann parallel zu dieser Verbindungslinie weitere Linien durch 2, 3, 4, 5 usw. der gegebenen logarithmischen Einteilung. Diese Parallelen schneiden die zu teilende Strecke in den gewünschten logarithmischen Abständen. In welchem Winkel man die zu teilende Strecke an die Basis ansetzt, ist gleichgültig, es kann sich hierbei ein spitzer, ein rechter oder ein stumpfer Winkel ergeben. Am vorteilhaftesten ist ein rechter bzw. ein angenähert rechter Winkel.

Ein Beispiel kann das erläutern: In Bild 6 wurde auf eine Gerade A–B die logarithmische Teilung eines Rechenschiebers übertragen. Im Punkt B wird die zu unterteilende, 4,4 cm lange Strecke B–C angesetzt. Es wird A mit C verbunden, und zu dieser Strecke A–C werden dann Parallelen durch die Punkte 2, 3, 4, 5... gezogen, die die Strecke B–C in den Punkten 2', 3', 4', 5'... schneiden. Damit ist die Strecke B–C logarithmisch geteilt.

Bild 7. Herstellung einer logarithmischen Teilung über eine Hilfsstrecke

Entsprechend kann man auch die 15 cm lange Strecke A–C unterteilen (gestrichelte Parallele) und die Strecke A–D. Es spielt also keine Rolle, ob die zu teilende Strecke kürzer oder länger ist als die vorhandene logarithmische Einteilung. Ist die zu teilende Strecke viel kleiner als der gegebene Maßstab, so kann man auch von einem bereits verkleinerten Maßstab ausgehen. In Bild 7 sollte eine Strecke von 2,2 cm logarithmisch unterteilt werden. Zu diesem Zweck wird zunächst eine Hilfsstrecke A–C von 5 cm Länge logarithmisch unterteilt, und von diesem Hilfsmaßstab geht man dann zu der Strecke A–D von 2,2 cm Länge über.

Der Praktiker: Kann man auch andere Teilungen als logarithmische auf diese Art übertragen?

Der Ingenieur: Diese Methode der Herstellung von „Teilstrecken" ist natürlich nicht auf logarithmische Teilungen beschränkt. Man kann jede Teilungsart übertragen. Sie ist auch sehr bequem, wenn man eine gegebene Strecke in eine Anzahl gleicher Teile zergliedern soll. Nehmen wir einmal an, man soll eine Linie von 11 cm in 9 gleiche Teile teilen. Das ist mit einem Zentimetermaß zu machen, aber sehr umständlich und ungenau. Mit der grafischen Methode aber ist es ein-

fach. Man trägt auf einer Linie einfach neunmal 1 cm ab, setzt an ein Ende dieser Linie die Strecke von 11 cm an und zieht dann, wie besprochen, die Parallellinien.

Der Praktiker: Das ist ja wirklich eine einfache und bequeme Art, Teilungen jeder Art herzustellen!

Der Ingenieur: Als interessanten Unterschied der logarithmischen Teilung gegenüber der linearen haben wir schon gefunden, daß wir bei der logarithmischen Teilung nie zu einem Nullpunkt kommen. Es gibt noch einen weiteren grundlegenden Unterschied. Wenn Sie bei einer linearen Teilung von 1, 10, 20 cm beispielsweise noch die Zwischenstriche je Zentimeter machen wollen, so müssen Sie jedesmal neun Striche einfügen. Mit dem jeweils ersten, schon vorhandenen Strich sind es zehn Striche: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 usw. Bei der logarithmischen Teilung dagegen sind zwischen den für die Teilung nach Größenordnungen bereits vorhandenen Strichen nur noch je acht Striche einzufügen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 usw. Es ist also ein Strich verlorengegangen. Sie sehen, es sind wohl dieselben altbekannten Zahlen; durch die andere Betrachtungsweise haben sie aber ein ganz anderes Aussehen erhalten.

Die logarithmische Teilung ist unentbehrlich, weil sie gestattet, Skalen von langen Zahlenreihen anzufertigen, die bei linearer Einteilung unmöglich wären, und weil man mit ihr kleinste und größte Werte zugleich betrachten kann. Gerade bei kleinsten Werten ist die Genauigkeit am größten.

Über logarithmische Skalen werden wir uns später einmal noch ausführlich unterhalten. Jetzt wollen wir wieder zum Rechnen mit Potenzen zurückkehren.

Potenzen entstehen, wie schon dargelegt, dadurch, daß man eine Zahl so oft mit sich selbst multipliziert, wie die hochstehenden Ziffern oder Buchstaben – Exponent genannt – angeben. Die Zahl selbst nennt man dabei Grundzahl oder Basis.

Der Praktiker: Eigentlich ist dann doch die ganze Potenzrechnerei nichts weiter als eine Multiplikation!

Der Ingenieur: Ja und nein! Bei der Multiplikation habe ich aufgezeigt, daß man sie auf die Addition zurückführen kann. Genau so ist es hier: Potenzen kann man auf die Multiplikation zurückführen. Aber ebensowenig wie die Multiplikation als eine Addition angesehen werden kann, ebensowenig können Potenzen als Multiplikationsaufgaben betrachtet werden. Sie sind eben wieder eine höhere Rechnungsart. Wir wären damit wieder einmal bei der mathematischen Stufenleiter (siehe Bild 1) angelangt, nur bei einer höheren Sprosse.

8. Stunde:
Von Potenzen und Wurzeln III

Wurzelziehen oder Radizieren – Warum denn umständlich, wenn es einfach geht – Regeln des Quadrierens – Die Addition von Potenzen – Die Subtraktion von Potenzen – Die Buchstabengruppe ist eine geschlossene Gesellschaft – Die Multiplikation von Potenzen – Die Division von Potenzen – Verschiedene Basis, gleiche Exponenten.

Der Praktiker: Bei der mathematischen Stufenleiter gibt es außer der Addition und der Multiplikation noch eine andere Folge, das Gegenstück gewissermaßen: die Subtraktion und die Division. Was ist nun das Gegenstück zum Potenzieren?

Der Ingenieur: Das Wurzelziehen oder Radizieren. So wie ich sagen kann: $3 \cdot 3 = 9 = 3^2$, so kann ich auch umgekehrt von 9 ausgehen und die Zahl suchen, welche mit sich selbst multipliziert 9 ergibt. Hierfür verwendet man das Wurzelzeichen: $\sqrt{9} = 3$.

Der Praktiker: 4^3, also die dritte Potenz von 4, ist 64. Wie kann man nun den entsprechenden Vorgang beim Wurzelziehen bezeichnen?

Der Ingenieur: Sie wollen also die Zahl suchen, welche dreimal mit sich selbst multipliziert 64 ergibt. Das schreibt man: $\sqrt[3]{64} = 4$. Man schreibt also den Wurzelexponenten (in unserem Falle 3) oben in das Wurzelzeichen: $\sqrt[n]{a} = x$. Nur bei der zweiten Wurzel läßt man aus Bequemlichkeitsgründen die 2 fort; diese Wurzeln kommen ja am häufigsten vor. Zur zweiten Wurzel sagt man Quadratwurzel, zur dritten Wurzel Kubikwurzel, analog wie bei den Potenzen, wo man die zweite Potenz als Quadratzahl und die dritte Potenz als Kubikzahl oder Kubus bezeichnet. Für $\sqrt{9}$ kann man auch zweite Wurzel aus neun, für $\sqrt[3]{64}$ kann man auch dritte Wurzel aus 64 sagen. – Die Zahl oder der Buchstabe unter dem Wurzelzeichen (bei $\sqrt[n]{a}$ ist es a) heißt Radikand.

Der Praktiker: Wie zieht man eine Wurzel?

Der Ingenieur: Bei Buchstaben kann man keine Wurzel ziehen. $\sqrt{a}$ kann nicht kürzer ausgedrückt werden. Da man nicht weiß, welchen Wert a hat, kann man auch nicht die Größe von $\sqrt{a}$ ausdrücken. Man weiß nur, daß $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ ist. Bei Ziffern dagegen kann man Wurzeln ziehen, aber nach einem sehr umständlichen Verfahren.

Zweiziffrige Quadratwurzeln ziehen Sie nach der Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; dreiziffrige Wurzeln nach der Formel: $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2$; vierziffrige Wurzeln nach der Formel: $(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2 + 2(a + b + c) \cdot d + d^2$; fünfziffrige Wurzeln nach der Formel: $(a + b + c + d + e)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2 + 2(a + b + c) \cdot d + d^2 + 2(a + b + c + d) \cdot e + e^2$.

Der Praktiker: Um Gottes willen, wer soll sich denn da noch zurechtfinden! Bei derartigen Formelungetümen kann einem ja die Lust an der Mathematik vergehen!

Der Ingenieur: Sie haben recht. Wir wollen uns mit der Auflösung dieser Formeln auch gar nicht erst abgeben. Sie würden sie doch bald vergessen, da Sie das Verfahren doch nie anwenden würden. Denn einfacher und sogar kinderleicht ist es, einen Rechenschieber zu Hilfe zu nehmen und die Wurzel abzulesen. Das werden Sie später lernen. Die Genauigkeit beim Rechenschieber ist aber begrenzt. Größere Genauigkeit bieten die Rechentafeln. Für Quadratwurzeln braucht man dazu nur die Zahlen 1 bis 100, da sich die Zahlen dann wiederholen und sich nur die Stellenzahl ändert. Man kann die Zahlen 100 bis 10 000 als Produkt von 100 mit der betreffenden Zahl auffassen: $400 = 4 \cdot 100$, $3600 = 36 \cdot 100$, entsprechend ist $\sqrt{400} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{100} = 2 \cdot 10 = 20$; $3600 = \sqrt{36} \cdot \sqrt{100} = 6 \cdot 10 = 60$. Entsprechend sind auch die Zahlen über 10 000 immer in Gruppen von zwei Zahlen (von hinten an gezählt) zu teilen. Dies nur zur ersten Orientierung.

Die häufigsten Potenzen sind die Quadrate. Wenn man die Zahlen der Reihe nach hinschreibt, so findet man, daß ihre Quadrate mit einer gewissen Gesetzmäßigkeit ansteigen:

n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n^2 =	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
Diff. =	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39

Die Quadrate steigen also von einer Zahl n_1 zur folgenden Zahl n_2 immer um $(2n_2 - 1)$ bzw. um $(2n_1 + 1)$ bzw. um $n_1 + n_2$ an.

Doch nun zur Addition von Potenzen. Wieviel wird wohl $a^2 + a^2$ sein?

Der Praktiker? Natürlich a^4!

Der Ingenieur: Falsch geraten, mein Freund! Ersetzen Sie doch einmal den Buchstaben a durch eine Zahl, sagen wir 10, und Sie werden selbst dahinterkommen, daß Ihre Lösung falsch ist.

Der Praktiker: Ist $a = 10$, so ist $a^2 = 100$, $a^3 = 1000$. Also ist $a^2 + a^3 = 100 + 1000 = 1100$.

Der Ingenieur: Und a^5?

Der Praktiker: a^5 wäre 100 000. Ja, ich sehe ein, daß meine Rechnung falsch war. Aber was ist denn nun $a^2 + a^3$?

Der Ingenieur: Daraus wird nichts anderes als $a^2 + a^3$. Bei $10^2 + 10^3$ können Sie noch rechnen: $10^2 + 10^3 = 1{,}1 \cdot 10^3$. Bei $a^2 + a^3$ dagegen nicht, da Sie nicht wissen, wie groß a ist. Das können Sie also nicht anders ausdrücken. Entsprechend ist es auch mit der Subtraktion. Bei Ziffern können Sie rechnen: $2{,}4 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^2 = 2{,}4 \cdot 10^3 - 0{,}2 \cdot 10^3 = 2{,}2 \cdot 10^3$. Bei Buchstaben dagegen können Sie genauso wenig wie bei der Addition eine Vereinfachung vornehmen. $a^3 - a^2$ ist und bleibt nichts anderes als $a^3 - a^2$. Wieviel ist nun aber $a^2 + a^2$?

Der Praktiker: Jetzt werde ich lieber erst überlegen, ehe ich etwas Falsches sage. Setzt man wieder $a = 10$, so wäre die Aufgabe also $10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200 = 2 \cdot 10^2$. Also wäre demnach wohl auch $a^2 + a^2 = 2\,a^2$?

Der Ingenieur: Richtig! Und entsprechend ist $2\,a^2 - a^2 = a^2$; $9\,a^3 - 4\,a^3 = 5\,a^3$. Es ist also hieraus die Regel abzuleiten, daß Potenzen von Buchstaben nur dann addiert oder subtrahiert werden können, wenn sie den gleichen Exponenten und gleichen Grundbuchstaben haben.

Der Praktiker: Wenn nun aber die Aufgabe etwas komplizierter ist, etwa $5\,a^2bc^3 + 7\,a^2bc^3$? Kann ich diese Aufgabe lösen oder vereinfachen?

Der Ingenieur: Nein! Denn Sie wissen ja nicht, was a, b und c im einzelnen bedeutet. Auf jeden Fall ist aber a^2bc^3 etwas anderes als a^3bc^3. Die Buchstabengruppe ist stets als ein geschlossenes Ganzes zu betrachten. Wieviel ist nun aber $20 + 3\,ab^2c$?

Der Praktiker: Da dürfte wohl auch nichts weiter zu vereinfachen sein, denn ab^2c ist nur im zweiten Summanden vertreten.

Der Ingenieur: Ich sehe, Sie haben die Dinge begriffen. Genau dasselbe wie bei der Addition trifft bei der Subtraktion zu. Auch hier können Sie nur zwei Potenzen voneinander subtrahieren, wenn alle Grundbuchstaben und Exponenten der Buchstabengruppe einander gleich sind.

Wir können jetzt zur Multiplikation übergehen. Am einfachsten macht man sich die Multiplikation wieder an Zahlen klar. Es sei die Aufgabe gestellt: $2 \cdot 10^3 \times 3 \cdot 10^3$.

Der Praktiker: Es ist $2 \cdot 10^3 = 2000$, $3 \cdot 10^3 = 3000$; $2000 \cdot 3000 = 6\,000\,000 = 6 \cdot 10^6$. Es ist also $2 \cdot 10^3 \times 3 \cdot 10^3 = 6 \cdot 10^6$.

Der Ingenieur: Richtig! Es ist also $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Potenzen mit gleicher Basis (Grundzahl) werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert. Und ebenso ist es bei der Division: Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert: $a^x : a^y = a^{x-y}$.

Der Praktiker: Wie ist es nun, wenn der Exponent gleich ist, die Grundzahl aber verschieden?

Der Ingenieur: In diesem Falle werden die Grundzahlen miteinander multipliziert bzw. durcheinander dividiert, und das Ergebnis erhält den gemeinsamen Exponenten. Also: $a^n \cdot b^n = (ab)^n$; $a^n : c^n = (a : c)^n$ oder $\frac{a^n}{c^n} = \left(\frac{a}{c}\right)^n$. Zur Nachprüfung setzen Sie einmal Zahlen ein und rechnen Sie die Beispiele durch. Sagen wir $a = 7$, $b = 4$, $c = 5$, $n = 3$.

Der Praktiker: Es wäre also $a^n \cdot b^n = 7^3 \cdot 4^3 = 343 \cdot 64 = 21\,952$. Es ist weiter $7 \cdot 4 = 28$; $28^3 = 21\,952$. $a^n : c^n = 7^3 : 5^3 = 343 : 125 = 2{,}744$; $7 : 5 = 1{,}4$; $1{,}4^3 = 2{,}744$. Ihre Regel stimmt also.

9. Stunde:
Von Potenzen und Wurzeln IV

Potenzierung von Potenzen – Radizierung von Potenzen – Das $U^{1/2}$-Gesetz – Am Anfang war die Addition – Der Urahn aller Mathematiker – Negative Potenzen werden umgeformt – Eine Falle wird gestellt – Drei wichtige Formeln.

Der Ingenieur: Wieviel ist nun $a^n : a^n$?

Der Praktiker: Doch wohl genau so wie irgendeine andere Division gleicher Zahlen: 1.

Der Ingenieur: Ja, das stimmt. – Nun kann man Potenzen auch potenzieren. Es ist $(a^3)^4 = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$. Sie sehen also bei der Multiplikation, der Division und beim Potenzieren der Potenzen, daß man immer eine Stufe auf der mathematischen Stufenleiter heruntersteigt; aus der Multiplikation der Potenzen wird eine Addition der Exponenten, aus der Division wird eine Subtraktion der Exponenten, und aus dem Potenzieren der Potenzen wird eine Multiplikation der Exponenten.

Der Praktiker: Dann müßte man also auch annehmen, daß aus der Radizierung der Potenzen eine Division der Exponenten wird.

Der Ingenieur: Das wird es auch. Wenn Sie beispielsweise die Quadratwurzel aus U^3 bilden, so wird aus $\sqrt{U^3} = U^{\frac{3}{2}}$. Dieses $U^{\frac{3}{2}}$ spielt ja in der Funktechnik eine große Rolle, da der Anodenstrom im Raumladegebiet nach dem $U^{\frac{3}{2}}$-Gesetz ansteigt.

Der Praktiker: Nun kann ich endlich auch den $U^{\frac{3}{2}}$-Anstieg begreifen. Ich konnte mir bisher darunter nie etwas Rechtes vorstellen. Ich wußte nicht, wie man das berechnen soll, wie man eine 3/2-Potenz bildet. Das ist ja ganz einfach! Man braucht nur zuerst U^3 auszurechnen und dann hieraus die Quadratwurzel zu ziehen!

Der Ingenieur: Richtig! Und noch einfacher geht's mit dem Rechenschieber. Da brauchen Sie nur einfach abzulesen! Doch das werden wir erst in einer der nächsten Stunden behandeln.

Was wird nun aber $a^{\frac{1}{2}}$ sein?

Der Praktiker: Eigentlich müßte es sich damit ähnlich verhalten wie mit $U^{\frac{3}{2}}$.

Der Ingenieur: Jawohl! Der Nenner des Exponenten ist gleich der Wurzel der Grundzahl, wie das vorige Beispiel zeigte. Es ist also $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^1} = \sqrt{a}$; $a^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a}$ usw. und umgekehrt. Aus einem Wurzelausdruck wird also eine Potenz, deren Exponent ein Bruch ist, der Wurzelexponent wird hierbei der Nenner des Bruches.

Der Praktiker: Das entspricht ja ungefähr der Regel beim Dividieren eines Bruches durch einen andern Bruch, daß man den zweiten Bruch umdreht und dann die Brüche miteinander multipliziert!

Der Ingenieur: Sie sehen also, die Radizierung läßt sich auf die Potenzierung zurückführen, die Potenzierung auf die Multiplikation, auch die Division auf die Multiplikation, die Multiplikation auf die Addition, ebenso die Subtraktion auf die Addition. Man kann also sagen, die Addition ist die eigentliche Grundrechnungsart, auf der sich alle andern Arten aufbauen.

Der Praktiker: Da ist gewissermaßen der erste Ur-Wilde, der entdeckte, daß die fünf Finger seiner linken Hand zusammen mit den fünf Fingern seiner rechten Hand zehn Finger ergeben, der geistige Urahn aller Mathematiker gewesen!

Der Ingenieur: Und er hat damit den entscheidenden Schritt gemacht, der die Menschheit aus dem Stadium der Wildheit hinausführte.

Auch die Potenzen mit negativen Exponenten kann man umformen. Wie Sie wissen, ist $10^{-2} = 0{,}01$. Das ist aber gleich $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$. Es ist also $0{,}07 = 7 \cdot 10^{-2} = \frac{7}{100} = \frac{7}{10^2}$. Wir sehen also, daß ein negativer Exponent sich in einen positiven Exponenten unterm Bruchstrich umwandeln läßt. Beide bedeuten dasselbe.

Der Praktiker: Das ist ja besonders wichtig beim Rechnen mit µF und pF. So ist z. B. der Wechselstromwiderstand eines Kondensators $\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$; bei f = 468 kHz ist also der Widerstand eines 200-pF-Kondensators:

$$\frac{1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 468 \cdot 10^3 \cdot 200 \cdot 10^{-12}} = \frac{10^{12}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 468 \cdot 10^3 \cdot 200} = \frac{10^7}{6{,}28 \cdot 468 \cdot 2} =$$

$$= \frac{10\,000 \cdot 10^3}{5880} = 1{,}7 \cdot 10^3 = 1{,}7\ \text{k}\Omega.$$

Der Ingenieur: Das ist sehr gut, daß Sie sich selbst eine Aufgabe stellten und sie auch richtig lösten. Das zeugt doch davon, daß Sie Interesse an der Sache haben. Fahren Sie so fort, nur durch stetes Üben können wir unser Gedächtnis mathematisch schulen und dahin kommen, daß uns auch die Lösung vorher schwierig erscheinender Aufgaben leichtfällt. Die paar Stunden, die wir gemeinsam schulen, können nur Anregungen bringen und den Weg zeigen. Deshalb üben, üben und nochmals üben!

In der vorigen Stunde hatten wir gefunden, daß $a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)^2$. Ist nun auch $a^2 + b^2 = (a + b)^2$?

Der Praktiker: Ich denke doch!

Der Ingenieur: Setzen Sie doch Ziffern an Stelle der Buchstaben! Sagen wir: a = 3, b = 5. Dann werden Sie gleich dahinterkommen, daß $a^2 + b^2$ und $(a + b)^2$ nicht dasselbe ist.

Der Praktiker: Es ist also $3^2 \cdot 5^2 = 9 \cdot 25 = 225 = 15^2 = (3 \cdot 5)^2$. Die erste Gleichung stimmt also. Weiter ist $a^2 + b^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$. $(a + b)^2$ wäre $(3 + 5)^2 = 8^2 = 64$. Es ist also $a^2 + b^2$ nicht dasselbe wie $(a + b)^2$.

Wie kann man denn nun aber mit $a^2 + b^2$ und $(a + b)^2$ weiter verfahren? Und zuvor: Wie kann man denn beim Sprechen auseinanderhalten, ob $a + b^2$ oder $(a + b)^2$ gemeint ist?

Der Ingenieur: Für $a + b^2$ sagt man „a + b Quadrat" oder „a plus b hoch zwei", für $(a + b)^2$ aber „a + b im Quadrat". Eigentlich ist „hoch zwei" und „im Quadrat" ja dasselbe; der Sprachgebrauch hat sich aber

so entwickelt, daß man unter „a + b im Quadrat" stets $(a + b)^2$ versteht.

$a^2 + b^2$ kann man nicht anders ausdrücken. Anders dagegen ist es bei $(a + b)^2$. Es ist $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ba + ab + b^2$ $a^2 + b^2 + 2ab$. Diese Formel haben wir ja schon kennengelernt. $(a + b)^2$ ist also um $2ab$ größer als $a^2 + b^2$.

Der Praktiker: Es müßte in unserm Zahlenbeispiel also $(3 + 5)^2$ um $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ größer sein als $3^2 + 5^2$. Das stimmt genau.

Der Ingenieur: Die Gleichung $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ist sehr wichtig, man muß sie glatt auswendig lernen. Ebenso wichtig sind noch zwei weitere Gleichungen, die nachfolgenden Gleichungen II und III.

$$\text{I. } (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$\text{II. } (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$\text{III. } (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Versuchen Sie einmal die Gleichungen II und III zu entwickeln!

Der Praktiker: Es ist $(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2$ $= a^2 + b^2 - 2ab$; $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$. Demnach sind die drei obigen Gleichungen die Lösung für alle Möglichkeiten der Multiplikation von $(a + b)$ und $(a - b)$: $(a + b) \cdot (a + b)$, $(a - b) \cdot (a - b)$, $(a + b) \cdot (a - b)$. Es ist ja äußerst interessant, daß man $a^2 + b^2$ nicht weiter verwandeln kann, daß aber aus $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ wird. Hat man eigentlich für eine Zusammenfassung wie $(a + b)$ bzw. $(a - b)$ einen besonderen Namen?

Der Ingenieur: Man nennt die Verbindung mehrerer Zahlen durch Plus- oder Minuszeichen ein Aggregat; die einzelnen Zahlen sind die Glieder des Aggregats.

10. Stunde:
Von Potenzen und Wurzeln V

Multiplikation von Aggregaten – Vorsicht, Glatteis! – Binome – Umgang mit Wurzeln – Wurzeln mit negativen Exponenten – Von der ersten Wurzel.

Der Ingenieur: Aggregate werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied des einen Aggregates mit jedem Glied des anderen Aggregates multipliziert und die erhaltenen Produkte je nach ihrem Vorzeichen addiert oder subtrahiert, wobei stets die Vorzeichenregel zu beachten ist. Wie lautet die Vorzeichenregel eigentlich?

Der Praktiker: Bei der Multiplikation und bei der Division entsteht immer Plus, wenn beide Vorzeichen gleich sind, und immer Minus, wenn beide Vorzeichen verschieden sind.

Wie ist nun aber die Rechnung bei den Gleichungen I bis III, die wir in der neunten Stunde behandelt haben, wenn der Exponent keine 2, sondern eine 3 ist?

Der Ingenieur: Sie müssen dann eben die Aggregate der Gleichungen I bis III nochmals mit $(a + b)$ bzw. mit $(a - b)$ multiplizieren. Das können Sie aber selbst machen. Also bitte!

Der Praktiker: Es ist demnach

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 (a + b) = (a^2 + b^2 + 2ab)(a + b)$$
$$= a^3 + ab^2 + 2a^2b + b^3$$
$$+ 2ab^2 + a^2b$$
$$\overline{a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3}.$$

Weiter ist $(a - b)^3 = (a^2 + b^2 - 2ab)(a - b) = a^3 + ab^2 - 2a^2b - b^3$
$$+ 2ab^2 - a^2b$$
$$\overline{a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3}.$$

Weiter kann man noch bilden:

$$(a + b)^2 (a - b) = (a^2 + b^2 + 2ab)(a - b) = a^3 + ab^2 + 2a^2b - b^3$$
$$- 2ab^2 - a^2b$$
$$\overline{a^3 - ab^2 + a^2b - b^3}$$

sowie $(a - b)^2 (a + b) = (a^2 + b^2 - 2ab)(a + b)$
$$= a^3 + ab^2 - 2a^2b + b^3$$
$$- 2ab^2 + a^2b$$
$$\overline{a^3 - ab^2 - a^2b + b^3}.$$

Wieviel ist nun aber $(a + b + c)^2$?

Der Ingenieur: Die Rechnung ist ebenso. Es ist

$$(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b + c)$$
$$= a^2 + ab + ac + b^2 + bc + c^2$$
$$+ ab + ac + bc$$
$$\overline{a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2}.$$

Sie können das noch weiter zusammenziehen zu
$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2c(a + b)$.

$(a - b - c)^2$ wäre $(a - b - c)(a - b - c)$
$= a^2 - ab - ac + b^2 + bc + c^2$
$\quad - ab - ac \quad + bc$
$a^2 - 2ab - 2ac + b^2 + 2bc + c^2$
$= a^2 + b^2 + c^2 - 2a(b + c) + 2bc.$

Und $(a + b - c)^2 = (a + b - c)(a + b - c)$
$= a^2 + ab - ac + b^2 - bc + c^2$
$\quad + ab - ac \quad - bc$
$a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + c^2$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2c(a + b).$

So können Sie alle entsprechenden Produkte bilden; Sie müssen nur die Vorzeichenregel beachten: Gleiche Vorzeichen ergeben Plus, ungleiche Vorzeichen Minus.

Sie haben übrigens Ihre Aufgabe durchaus richtig gelöst. Auf diese Art können Sie Aufgaben auch mit immer größeren Exponenten berechnen. Sie können z. B. $(a + b)^4 (a - b)^4$ ausrechnen oder $(a + b)^4 (a + b)^5$, auch $[(a + b)^2]^2 \ldots$

Der Praktiker: Halt! Ich glaube, Sie wollen mich aufs Glatteis führen! $(a + b)^2 (a + b)^2$ und $[(a + b)^2]^2$ ist doch dasselbe!
Es ist $(a + b)^2 (a + b)^2 = (a + b)^{2+2} = (a + b)^4$ und $[(a + b)^2]^2 = (a + b)^{2 \cdot 2} = (a + b)^4$!

Der Ingenieur: Gut aufgepaßt! Aber ist nun auch $(a + b)^3 (a + b)^3$ und $[(a + b)^3]^2$ dasselbe?

Der Praktiker: Nein! Es ist $(a + b)^3 (a + b)^3 = (a + b)^{3+3} = (a + b)^6$ und $[(a + b)^3]^2 = (a + b)^{3 \cdot 2} = (a + b)^6$.

Gleichheit ist nur bei dem Exponenten 2, weil sowohl $2 + 2$ als auch $2 \cdot 2 = 4$ ist.

Der Ingenieur: Sehr gut! Wenn Sie nun $(a + b)^4$ oder $(a + b)^5$ aufzulösen haben, so ist das nach der bisherigen Methode sehr umständlich. Derartige Binome kann man viel einfacher auflösen.

Der Praktiker: Binome sagen Sie? Was ist denn ein Binom?

Der Ingenieur: Aggregate, die nur aus zwei Gliedern bestehen, wie z. B. $(a + b)$, nennt man Binome. $(a + b)^2$, $(a + b)^3$ usw. sind also die Potenzen dieser Binome. Die Binomialrechnung ist äußerst interessant. Wir werden sie aber erst später behandeln, denn obgleich die Binomialrechnung leicht zu verstehen ist, so führt sie doch schon zur Reihenbildung und zur Differentialrechnung.

Die mathematische Behandlung der Potenzen wäre damit in großen Zügen abgeschlossen. Wir werden später noch viele Beispiele aus der Praxis behandeln und dadurch die jetzt gelernten Regeln weiter aus-

bauen. Zuvor aber wollen wir uns erst noch etwas mit den Wurzeln beschäftigen und uns dann ein wenig mit dem Rechenschieber befassen.

Was Wurzeln sind, haben wir bereits gesehen, ebenso haben wir die Ausdrücke Wurzelexponent und Radikand kennengelernt und wissen auch, was eine Quadratwurzel und was eine Kubikwurzel ist.

Der Praktiker: Wie spricht man eine Wurzel aus?

Der Ingenieur: $\sqrt{a}$ heißt „Quadratwurzel aus a" oder kurz „Wurzel aus a"; $\sqrt[7]{356}$ „siebente Wurzel aus 356".

Nach dieser Einleitung wollen wir den näheren Umgang mit Wurzeln kennenlernen.

Potenziert man eine Wurzel mit ihrem Wurzelexponenten, so erhält man den Radikanden: $(\sqrt[7]{256})^7 = 256$, $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Ebenso erhält man den Radikanden, wenn der Radikand selbst eine Potenz ist und Wurzelexponent und Radikandexponent gleich sind: $\sqrt[7]{256^7} = 256$, $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Der Praktiker: Dann ist es also gleichgültig, ob ich schreibe $\sqrt[n]{a^n}$ oder $(\sqrt[n]{a})^n$. Trifft das nur zu, wenn Wurzelexponent und Potenzexponent gleich sind oder auch, wenn sie ungleich sind?

Der Ingenieur: Das trifft in allen Fällen zu. Es ist $\sqrt[3]{3^5} = (\sqrt[3]{8})^5$, $\sqrt[3]{7^4} = (\sqrt[3]{7})^4$, $\sqrt[5]{a^m} = (\sqrt[5]{a})^m$, und weiter ist, wie wir bereits früher sahen, $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, so daß auch $(\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$ ist.

Der Praktiker: Gibt es auch Wurzeln mit negativen Wurzelexponenten?

Der Ingenieur: Gewiß! Die Wurzelrechnung ist ja gewissermaßen die Umkehrung der Potenzrechnung; infolgedessen gibt es hier wie dort dieselben Vorzeichen und Umformungen. Es ist doch z. B. $1000 = 10^3$, infolgedessen ist $10 = \sqrt[3]{1000}$. Ebenso ist es aber auch mit $0{,}001 = 10^{-3}$, $10 = \sqrt[-3]{0{,}001}$. Hierfür kann man auch – analog der $U^{\frac{4}{3}}$-Potenz – sagen: $\sqrt[-3]{0{,}001} = 0{,}001^{\frac{1}{-3}} = 0{,}001^{-\frac{1}{3}}$. Man kann auch durch Umstellung das Minuszeichen wegbringen: $10 = \frac{1}{\sqrt[3]{0{,}001}} = \frac{1}{0{,}001^{\frac{1}{3}}}$.

Es ist also alles dasselbe.

Der Praktiker: Es ergibt sich demnach bei Wurzeln mit negativen Exponenten allgemein: $\sqrt[-n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{-n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$.

Bei den Potenzen gibt es aber auch solche mit den Exponenten Null und Eins: 10^0, 10^1, wobei die erste Potenz immer gleich der Grundzahl selbst und die nullte Potenz immer gleich eins ist. Gibt es nun aber auch eine nullte und erste Wurzel?

Der Ingenieur: Gewiß! Es gibt genau soviel Wurzeln wie Potenzen. Da $10^1 = 10$, ist $\sqrt[1]{10} = 10$ oder allgemein $\sqrt[1]{a} = a$. Es ist also die erste Wurzel von a gleich a und damit $\sqrt[1]{a} = a^1 = a$.

Der Praktiker: Das ergibt sich ja eigentlich auch nach einer anderen Rechnung. Es ist $\sqrt[1]{a} = a^{\frac{1}{1}} = a^1 = a$.

11. Stunde:
Von Potenzen und Wurzeln VI

Die nullte Wurzel – Der Bruchzahlexponent – Wurzeln aus 1 und 0 – Addition und Subtraktion von Wurzeln – Multiplikation von Wurzeln – Division von Wurzeln.

Der Praktiker: Wie ist es nun mit der nullten Wurzel?

Der Ingenieur: Hierbei müssen Sie sich vor Fehlschlüssen hüten! Wenn man nach derselben Methode wie soeben seine Schlüsse ziehen würde, so ergäbe sich: $10^0 = 1$, $10 = \sqrt[0]{1}$. Ebenso aber auch $3^0 = 1$, $3 = \sqrt[0]{1}$. Sind zwei Größen aber einer dritten gleich, so sind sie auch untereinander gleich. Es ergäbe sich also, da sowohl 10 als auch $3 = \sqrt[0]{1}$, daß $10 = 3$ ist. Es muß also ein Fehlschluß vorhanden sein!

Versuchen wir es einmal anders herum! Es ist $\sqrt[0]{a} = a^{\frac{1}{0}}$. Was $1:0$ ist, findet man durch Überlegung. Null ist eine unendlich kleine Zahl. Würden wir $1:10$ dividieren, so käme 0,1 heraus, bei $1:0{,}1 = 10$, bei $1:10^{-4} = 10^4$ usw. Je kleiner also der Divisor, desto größer der Quotient, das Resultat. $1:0$ muß also unendlich groß sein, so daß man für $a^{\frac{1}{0}}$ setzen kann a^{∞}. Es ist also auch $\sqrt[0]{1}$ ca. ∞ (genauer: ein unbe-

stimmter Wert) und nicht gleich 3 oder 10. Die nullte Wurzel einer Zahl ist also ein unbestimmter Wert.

Der Praktiker: Kann der Wurzelexponent auch kleiner als eins sein?

Der Ingenieur: Gewiß! Eine Wurzel mit einem Exponenten kleiner als eins ist aber in Wirklichkeit eine Potenz, den $\sqrt[\frac{1}{4}]{a} = a^{\frac{1}{\frac{1}{4}}} = a^4$, $\sqrt[0,1]{10} = 10^{\frac{1}{0,1}} = 10^{10}$. Wie groß mag wohl die Quadratwurzel aus 1 sein?

Der Praktiker: Nun, da $1^2 = 1$, $1^3 = 1$, $1^4 = 1$ ist, so muß auch $\sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[2]{1} = 1$, $\sqrt[4]{1} = 1$ sein. Jede Wurzel aus 1 ist also 1. Es ist damit z. B. auch $\sqrt[7]{1} = 1^3$, weil beides gleich 1 ist. Wie groß ist aber eine Wurzel aus Null?

Der Ingenieur: Genau wie jede Potenz von Null wieder Null ist, so ist auch jede Wurzel aus Null wieder Null; denn ob ich eine Null, also ein Nichts, mit einer anderen Zahl multipliziere oder potenziere, durch eine andere dividiere oder radiziere, es kann niemals etwas anderes als ein Nichts, also eine Null, herauskommen.

Nun wollen wir die Addition und die Subtraktion von Wurzeln kennenlernen. Auch hier sind wieder viele Parallelen zur Potenzrechnung. Auch hier gibt es die Regel: Haben Wurzeln gleiche Exponenten und Radikanden, so kann man sie addieren und subtrahieren:

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a} = 2\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{8a},$$

$$3\sqrt{10} + 12\sqrt{10} = 15\sqrt{10},$$

$$37\sqrt[4]{a+b} - 12\sqrt[4]{a+b} = 25\sqrt[4]{a+b}.$$

Wieviel ist nun $\sqrt{a} + \sqrt{b}$?

Der Praktiker: Zunächst würde ich gleich sagen $\sqrt{a+b}$. Aber ich werde zur Vorsicht lieber mit Ziffern rechnen. a sei 9, b sei 25. Damit ist $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{9} + \sqrt{25} = 3 + 5 = 8$. $\sqrt{9+25}$ ist aber gleich $\sqrt{34} = 5{,}8$. Also ist $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ nicht gleich $\sqrt{a+b}$.

Der Ingenieur: Ja, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ kann nicht kürzer ausgedrückt werden. Es ist genauso wie bei den Potenzen. Wieviel ist nun aber $a^2 + \sqrt{a}$?

Der Praktiker: Das kann wohl nicht weiter zusammengezogen werden.

Der Ingenieur: Sie haben recht, das kann man nicht kürzer ausdrücken.

Nun wollen wir noch die Multiplikation und die Division von Wurzeln behandeln.

Wurzeln mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man die Radikanden multipliziert und unter ein gemeinsames Wurzelzeichen setzt:

$$\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{125 \cdot 27};\ \sqrt{36} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{36 \cdot 25};\ \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}.$$

Und umgekehrt kann man Wurzeln auflösen, indem man den Radikanden in seine Faktoren auflöst und diese unter das betreffende Wurzelzeichen setzt:

$$\sqrt{324} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{4} = 9 \cdot 2;\ \sqrt{50} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2};\ \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Die Division ist ähnlich. Wurzeln mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man die beiden Radikanden dividiert und dem Quotienten das gemeinsame Wurzelzeichen gibt.

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2};\ \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{72}{8}} = \sqrt{9} = 3;\ \sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Und umgekehrt kann man einen Wurzelbruch auflösen, indem man Zähler und Nenner mit je einem Wurzelzeichen versieht:

$$\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3};\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Der Praktiker: Die letzte Rechnungsart hat doch wohl nur ergänzenden Wert: Zu jeder Regel die Umkehrung. In der Praxis kommt sie doch wohl kaum vor.

Der Ingenieur: Sagen Sie das nicht! Wenn Sie daran denken, daß ein Bruch seinen Wert behält, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert, so werden Sie finden, daß gerade diese letzte Regel sehr wertvoll ist und so manchen Wurzelbruch auflöst.

Einige Beispiele:

$$\sqrt{\frac{12}{5}} = \sqrt{\frac{60}{25}} = \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{60};$$

$$\frac{12}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3 \cdot \sqrt[4]{4^4}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3 \cdot \sqrt[4]{16^1}}{\sqrt[4]{16}} = 3\sqrt[4]{\frac{16^1}{16}} = 3\sqrt[4]{16} = 3 \cdot 2 = 6;$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{12}; \quad \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{25}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{\frac{25}{5}} = 2\sqrt{5};$$

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{a \cdot b}{b\sqrt[3]{b^2}} = \frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b^3}{b^2}} = \frac{a}{b}\sqrt[3]{b} = \frac{a\sqrt[3]{b}}{b}.$$

Und so kann man noch viele Beispiele bringen; wir werden im Laufe des Unterrichts noch viele Beispiele kennenlernen.

Der Praktiker: Sie haben gerechnet: $\frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$. Ich bekomme aber etwas anderes heraus. Es ist $\sqrt{5} = 2{,}236$, also $\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10}{2{,}236} = 4{,}471$ Das ist doch viel mehr als $2\sqrt{5}$! Wie erklärt sich diese Differenz? Eins kann doch nur richtig sein!

Der Ingenieur: Ist denn da tatsächlich ein Unterschied? Wieviel ist denn $2\sqrt{5}$? Da $\sqrt{5} = 2{,}236$, ist $2\sqrt{5} = 2 \cdot 2{,}236 = 4{,}472$. Sie sehen also, es kommt dasselbe heraus, wie man auch rechnet. Sie haben sich wahrscheinlich durch die 2 vor $\sqrt{5}$ im Gegensatz zur 4 vor dem Komma düpieren lassen.

Das Gebiet der Wurzeln ist äußerst vielseitig, wir stoßen da auf noch ganz unbekannte Zahlenarten. Für heute wollen wir deshalb mit den Wurzeln Schluß machen. Die Anwendung der Grundrechnungsarten auf Potenzen und Wurzeln haben Sie jedenfalls kennengelernt. Was Sie noch nicht können, ist Wurzelziehen. Das geht am einfachsten, wie schon gesagt, mit dem Rechenschieber. Deshalb wollen wir uns in der nächsten Stunde mit dem Rechenstab oder Rechenschieber befassen.

12. Stunde:
Der Rechenschieber I

Sind Rechenschieber Angabe? – Arten der Rechenschieber – So sieht er aus! – Die Skalen und ihre Einteilung – Das Ablesen der Zahlen.

Der Ingenieur: Besitzen Sie einen Rechenschieber, und können Sie mit ihm arbeiten?

Der Praktiker: Nein, ich besitze keinen Rechenschieber. Ich habe oft gefunden, daß ich eine Rechenaufgabe im Kopf schneller ausgerechnet habe als meine Kollegen mit dem Rechenschieber. Mir kommt das immer ein klein wenig nach Angabe vor, wenn Kollegen bei jeder Gelegenheit den Rechenschieber in der Hand haben, so als fühlen sie sich schon als Meisteraspiranten.

Der Ingenieur: Sie werden bald anderer Meinung sein. Der Rechenschieber wird auch Ihnen bald eine unentbehrliche Hilfe sein, wenn Sie erst wissen, welche Erleichterungen er Ihnen verschafft. Also besorgen Sie sich bitte bald einen Rechenschieber!

Der Praktiker: Was für einen denn? Es gibt doch verschiedene Sorten: große, kleine, teure, billige, Spezial-Elektrostäbe usw. Lohnt es sich wirklich, 24 bis 28 DM für einen Rechenschieber auszugeben? Oder genügt einer für 3 bis 5 DM?

Der Ingenieur: Ein teurer Rechenschieber ist ein Präzisionsgerät, bei dem alles genau stimmt. Bei einem billigen Rechenschieber kann man derartige Anforderungen nicht stellen. Die Striche sind evtl. dicker, verschwommener, und die Ablesung ist dadurch ungenauer. Es kann auch vorkommen, daß die Skalen um $^1/_{10}$ mm untereinander differieren. Für die ersten Arbeiten genügt aber ein billiger – ein Schulrechenschieber – vollkommen. Später können Sie sich dann gelegentlich einen Präzisionsstab zulegen. Den Rechenschieber System Darmstadt bekommen Sie nur als Präzisionsstab, einen solchen nach System Rietz auch als billigen Schulstab. Nun die Größe: Je größer der Stab, desto genauer ist die Ablesung. Es ist also ein 25-cm-Rechenschieber angebracht.

Ich habe hier einen Schulrechenschieber, System Rietz, den können Sie vorläufig benutzen. Wie sieht nun solch Rechenschieber aus? Beschreiben Sie ihn doch einmal!

Der Praktiker: Der Körper des Rechenschiebers besteht aus Hartholz, nach dem Firmenprospekt soll es Birnbaumholz sein. Auf dem

Körper befinden sich weiße Zelluloidauflagen, in welche die Teilungen eingraviert sind.

Der Ingenieur: Man kann mehrere Teile unterscheiden. In dem eigentlichen S t a b k ö r p e r läuft ein beweglicher Teil, der S c h i e b e r oder die Z u n g e. Zum Festhalten des Resultates oder zum Einstellen dient der L ä u f e r aus Glas oder durchsichtigem Zelluloid, der über die Teilungen verschoben werden kann. Er hat einen oder drei Längsstriche. – Wieviel Skalen hat nun Ihr Rechenschieber? Und was fällt Ihnen dabei auf?

Der Praktiker: Auf der Zunge sind zwei Skalen: B und C. Die Skala B trägt die Ziffern 1...100, die Skala C: 1...10. Auf dem festen Stab befindet sich über der Zunge die Skala A, die genau dieselbe Teilung hat wie die Skala B, und unter der Zunge die Skala D, welche die gleiche Teilung hat wie die Skala C. Unter der Skala D ist noch eine Skala L, die auch von 1...10 geht. Sie ist ganz gleichmäßig geteilt – von Ziffer zu Ziffer noch 5 × 10fach unterteilt – im Gegensatz zu den Skalen A bis D, welche ungleichmäßig unterteilt sind. Über der Skala A ist noch eine Skala K von 1...1000, auch ungleichmäßig unterteilt (siehe Bild 8).

Der Ingenieur: Diese ungleichmäßige Teilung ist nicht etwa regellos, sondern sehr systematisch! Messen Sie einmal mit einem Zirkel, einem Maßstab oder mit einem Stückchen Papier auf der Skala A die Entfernung von 1...2 ab! Sie werden feststellen, daß sie 37,6 mm beträgt. Wenn Sie diese Entfernung weiterhin auf der Skala A abtragen, so sehen Sie, daß bei 2 · 37,6 mm die Ziffer 4 steht, bei 3 · 37,6 mm die Ziffer 8, bei 4 · 37,6 mm 16, bei 5 · 37,6 mm 32, bei 6 · 37,6 mm 64.

Der Praktiker: Sie sagen 16, 32, 64. Diese Ziffern kann ich auf dem Rechenschieber aber nicht entdecken!

Der Ingenieur: Betrachten Sie einmal die Strecke zwischen 10 und 20 auf der Skala A. Diese Strecke ist weiter unterteilt. Es sind 9 längere Striche – wovon der mittlere noch etwas länger ist – und zwischen den langen Strichen je 4 kurze. Der längste Strich in der Mitte bedeutet 15, der nächste längere Strich rechts 16. Zwischen 30 und 40 sind wieder neun lange Striche, dazwischen je ein kurzer Strich. Der zweite längere Strich hinter 30 ist 32. Zwischen 60 und 70 sind auch neun Striche. Der vierte hinter 60 bedeutet entsprechend 64. Ist Ihnen das klar?

Der Praktiker: Klar schon. Doch ich glaube, da muß ich noch tüchtig üben, bis mir das in Fleisch und Blut übergegangen ist!

Der Ingenieur: Wir werden nachher noch einige Übungen machen. Doch zunächst zurück zur Betrachtung der Skalen.

Bezeichnet man die Entfernung zwischen 1 und 2 auf der Skala A (37,6 mm) mit a, so steigt mit linearem Ansteigen der Entfernung a die Bezifferung der Skala A mit der Potenz von 2 an.

Es ist	1a	2a	3a
	= 2	4	8
	= 2^1	2^2	2^3
	4a	5a	6a
	16	32	64
	2^4	2^5	2^6

Eine derartige Teilung ist eine logarithmische Teilung. Wir haben die logarithmische Teilung bereits in der 7. Stunde durchgesprochen. Die Teilung 1...10 ist ebenso lang wie die Teilung 10...100 auf der Skala 1...100, nämlich 12,5 cm. Wie Sie sich vielleicht erinnern, muß man 0,301 mit der Gesamtlänge der Skala multiplizieren, um die Entfernung zwischen 1 und 2 zu erhalten. Das sind 0,301 · 12,5 = 3,76 cm = 37,6 mm, also so viel, wie wir vorhin gemessen haben. Ebenso können Sie alle andern Punkte mittels der Kennziffer der logarithmischen Teilung (siehe 7. Stunde) festlegen, wenn Sie sie mit 12,5 multiplizieren. Bei den Skalen C und D müssen Sie natürlich mit 25 multiplizieren.

Der Praktiker: Sind die Skalen bei allen Rechenschiebern gleich lang?

Der Ingenieur: Die Skalen C und D sind bei den normalen Rechenschiebern 25 cm lang. Die Taschenrechenschieber sind halb so groß, bei ihnen sind die Skalen C und D = 12,5 cm lang. Außerdem gibt es noch besondere Ausführungen von 50 cm Länge, die aber selten verwendet werden.

Bevor Sie mit dem Rechenschieber rechnen, müssen Sie erst einmal die Werte ablesen können. Es dürfen Ihnen da keine Fehler unterlaufen. Deshalb wollen wir hierauf zunächst etwas eingehen. Auf den Skalen A und B ist der Raum zwischen 1 und 2 (und ebenso zwischen 10 und 20) erst einmal in Zehntel unterteilt. Jedes Zehntel ist noch einmal in fünf Teile geteilt, so daß man zwischen 1 und 2 also auf $^1/_{100}$ genau

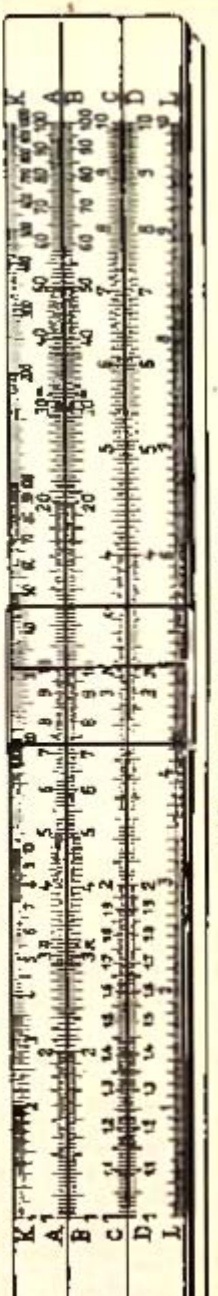


Bild 8. Ein Schul-Rechenschieber

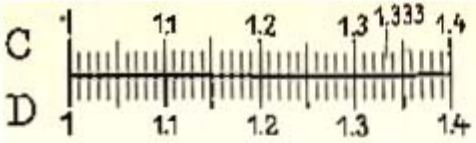
ablesen kann. Man liest also bei den einzelnen Strichen von 1 an: 1 – 1,02 – 1,04 – 1,06 – 1,08 – 1,1 – 1,12 – 1,14 – 1,16 usw. Zwischen 2 und 5 bzw. zwischen 20 und 50 sind die Zehntel gekennzeichnet, zwischen ihnen ist nur noch je ein Strich. Man liest also bei den einzelnen Strichen von 2 ab: 2 – 2,05 – 2,1 – 2,15 – 2,2 – 2,25 – 2,3 – 2,35 – 2,4 – 2,45 – 2,5 (der längere Strich ist in der Mitte) – 2,55 – 2,6 – 2,65 – 2,7 . . . Zwischen 5 und 10 bzw. zwischen 50 und 100 sind nur die Zehntel gekennzeichnet.

Die Skalen C und D sind noch einmal so lang wie die Skalen A und B. Sie sind infolgedessen noch feiner unterteilt; man kann noch kleinere Zahlenteile ablesen. Zwischen 1 und 2 sind zunächst einmal die Zehntel unterteilt und auch besonders bezeichnet. Zwischen den Zehnteln sind noch die Hundertstel gekennzeichnet. Also 1 – 1,01 – 1,02 – 1,03 – 1,04 – 1,05 (etwas länger) – 1,06 – 1,07 – 1,08 – 1,09 – 1,1 – 1,11 – 1,12 . . . Die Teilung zwischen 2 und 4 ist halb so fein wie zwischen 1 und 2, man kann also bis auf $^2/_{100}$ genau ablesen: 2 – 2,02 – 2,04 – 2,06 – 2,08 – 2,1 – 2,12 . . . Zwischen 4 und 10 kann man auf Zehntel und Zwanzigstel genau ablesen: 4 – 4,05 – 4,1 – 4,15 – 4,2 – 4,25 . . .

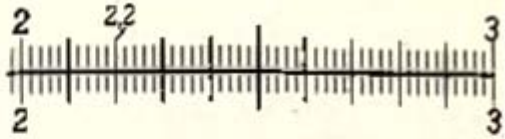
13. Stunde:
Der Rechenschieber II

Die Kunst des Schätzens von Zahlen – Die Grenzen der Genauigkeit – Das Potenzieren und Wurzelziehen beim Rechenschieber – Quadrate, Quadratwurzeln, Kubikzahlen, Kubikwurzeln – Potenzen von Zahlen über 10.

Der Ingenieur: Zwischenwerte zwischen zwei Strichen müssen geschätzt werden. Den halben Wert zwischen zwei Teilungen findet man leicht. Eigentlich liegt der halbe Wert etwas hinter der Mitte. So liegt auf der Skala C der Wert 1,5 etwa 4,4 cm von 1 entfernt, während die Strecke 1,5...2 nur 3,1 cm lang ist. Die Teilung ist ja logarithmisch und nicht linear. Die ganze Strecke von 1 bis 2 auf der Skala C ist 7,5 cm lang, und auf der halben Strecke, also nach 3,75 cm, liegt nicht 1,5, sondern 1,414. Wie bei dieser großen Teilung, so ist es auch bei den kleinen Teilungen. Bei den kleinen Teilungen macht die Differenz aber nur noch Bruchteile eines Millimeters aus und ist zu vernachlässigen. Man kann den halben Wert da ruhig mit der Hälfte der Strecke zwischen zwei Strichen identifizieren. Schwieriger ist es schon, die anderen Zwischenwerte zu schätzen. Bei einiger Übung kommt man aber bald dahin, die Zwischenwerte bis auf Fünftel genau zu schätzen. Im Anfang tut man gut daran, die Mitte zwischen zwei Strichen mit dem Läuferstrich zu fixieren. Dann kann man leichter beurteilen, ob $^1/_4$ oder $^2/_5$ oder $^3/_5$ usw.



Links: Bild 9. Hier liegt 1,333



Rechts: Bild 10. Hier liegt 2,2

Wir wollen jetzt zur Übung einige Werte schätzen. Welche Ziffer wäre z. B. hier auf der Skala C (siehe **Bild 9**)?

Der Praktiker: 1,335.

Der Ingenieur: Nein, die Mitte liegt etwas mehr rechts. Ich würde sagen: 1,333.

Der Praktiker: Woher weiß ich denn, ob 1,333 oder 13,33 oder 133,3 oder 1333 gemeint ist?

Der Ingenieur: Wo das Komma hinkommt, kann man am Rechenschieber nicht sehen. Die Stellenzahl muß man im Kopf überschlagen. Wir werden aber auch hierfür noch Regeln kennenlernen.

Wo würden Sie 2,2 auf der Skala C suchen?

Der Praktiker: Hier, beim 2. Teilstrich nach 2.

Der Ingenieur: Das ist verkehrt. Dort ist nicht 2,2, sondern 2,04. Dieser Fehler wird am Anfang oft gemacht. Davor muß man sich hüten; 2,2 ist hier (siehe **Bild 10**).

Stellen Sie einmal den Strich 1 der Skala B unter 16,66 der Skala A.

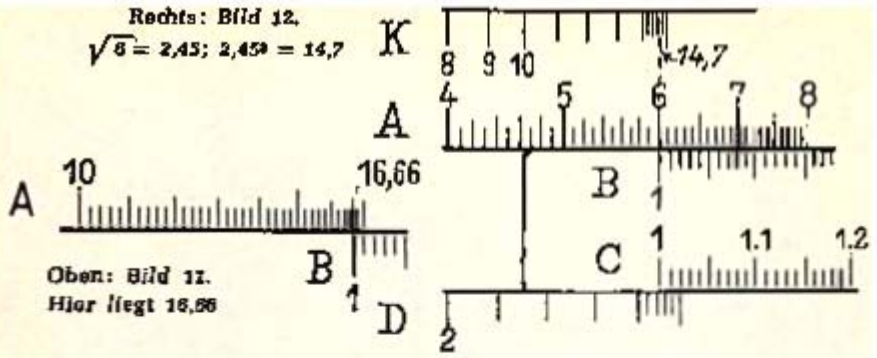
Der Praktiker: Ich würde so einstellen.

Der Ingenieur: Das wäre etwas zu weit nach rechts.

Der Praktiker: Wieso denn? Sechs ist doch auf der zweiten Hälfte zwischen 6 und 7. Da muß doch etwas hinter der Mitte eingestellt werden!

Der Ingenieur: Sie hätten recht, wenn der nächste Strich „sieben" bedeuten würde. Er bedeutet aber nicht sieben, sondern acht! Die Einstellung muß also ungefähr bei $^1/_3$ des Zwischenraumes zwischen dem 6er- und dem 8er-Strich gemacht werden (siehe **Bild 11**). Sie sehen, es gehört etwas Übung zum genauen Ablesen und Schätzen. Ich empfehle Ihnen deshalb, mit dem Läufer oder mit der „1" der Zunge öfter auf irgendeinen Ort einzustellen und dann die Werte jeweils auf den Skalen A und D abzulesen.

Der Praktiker: Einen absolut genauen Wert kann man doch wohl nur ablesen, wenn das Ergebnis direkt auf dem Strich liegt. Wie weit geht eigentlich die Genauigkeit des Rechenschiebers?



Der Ingenieur: Sie haben recht, die Genauigkeit beim Stabrechnen ist begrenzt. Man liest gewöhnlich auf drei Stellen ab. Nur zwischen 1 und 2 der Skalen C und D kann man noch evtl. die vierte Stelle schätzen. Für gewöhnliche Rechnungen genügt das ja auch. Ab und zu kommen allerdings auch Rechnungen vor, bei denen eine größere Genauigkeit verlangt wird, z. B. bei Frequenzhubmessungen im Dezimeterwellengebiet. Da muß man schon nach der alten Methode mit Papier und Bleistift rechnen. Solche Fälle sind aber selten.

Nun wollen wir uns dem eigentlichen Stabrechnen zuwenden. Das einfachste ist hierbei, was uns bisher am schwierigsten erschien: das Potenzieren und das Wurzelziehen, wenigstens bei der 2. und 3. Potenz. Hierbei gebrauchen wir die Zunge nicht; damit sie nicht irritiert, ziehen wir sie heraus. Wenn auf der Skala D die Grundzahl steht, so finden wir auf der Skala A die Quadratzahlen und auf der Skala K die Kubikzahlen, also die 2. bzw. die 3. Potenz. Und umgekehrt finden wir auf der Skala D die Quadratwurzeln der Zahlen, die auf der Skala A stehen, also der Zahlen von 1...100, und die Kubikwurzeln der Zahlen der Skala K, also von 1...1000. Also wieviel ist die Quadratwurzel von 6?

Der Praktiker: Hierzu stelle ich (siehe Bild 12) den Mittelstrich des Läufers auf die Ziffer 6 der Skala A oder den Anfang der Skalen B und C („1") unter die 6 der Skala A und lese auf der Skala D ab (siehe Bild 12). Hier steht der Strich des Läufers auf 2,45.

Der Ingenieur: Wenn Sie $1{,}67^2$ suchen, so stellen Sie den Läufer über 1,67 der Skala D und finden dann auf der Skala K darüberstehend das Resultat: 4,66 (siehe **Bild** 13).

Wieviel ist die Kubikzahl von 2,45? Und wieviel ist die Quadratwurzel (in Zukunft kurz: Wurzel) von 2?

Der Praktiker: Es ist $2{,}45^3 = 14{,}7$ (siehe Bild 12) und $\sqrt{2} = 1{,}41$ (siehe **Bild** 14).

Der Ingenieur: Jawohl, das stimmt. Oder noch genauer:
$\sqrt{2} = 1{,}414$.

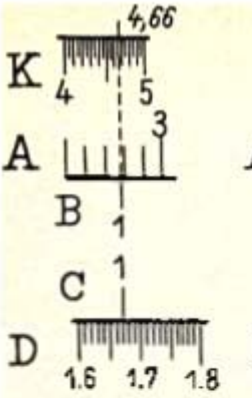


Bild 13. $1{,}67^2 = 4{,}66$

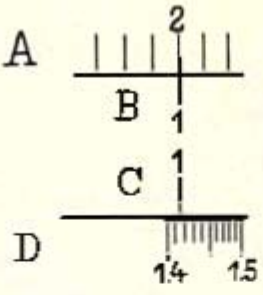


Bild 14. $\sqrt{2} = 1{,}41$

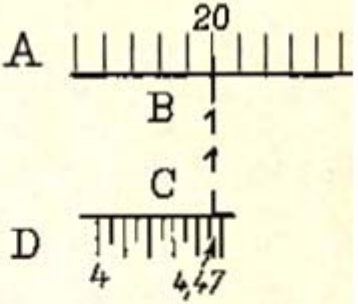


Bild 15. $\sqrt{20} = 4{,}47$

Wieviel ist nun aber die Wurzel von 20?

Der Praktiker: $\sqrt{20} = 4{,}47$ **(siehe Bild 15).**

Der Ingenieur: Und die Kubikwurzel von 20?

Der Praktiker: $\sqrt[3]{20} = 2{,}71$ **(siehe Bild 16).**

Der Ingenieur: Wieviel ist $\sqrt{10}$, $4{,}05^2$ **und** $4{,}05^3$**?**

Der Praktiker: Es ist $\sqrt{10} = 3{,}16$; $4{,}05^2 = 16{,}4$; $4{,}05^3$ ca. 66,5 **(siehe Bild 17).** Den letzteren Wert kann man nicht mehr ganz genau ablesen.

Das ist ja alles ganz einfach. Wie ist es aber nun, wenn ich Quadrate oder Kubikzahlen von Zahlen über 10 bilden will?

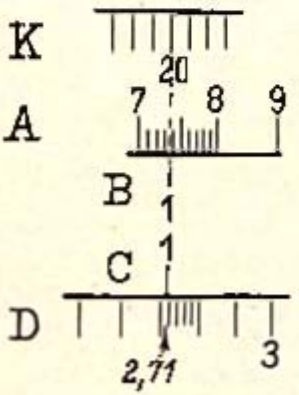


Bild 16. $\sqrt[3]{20} = 2{,}71$

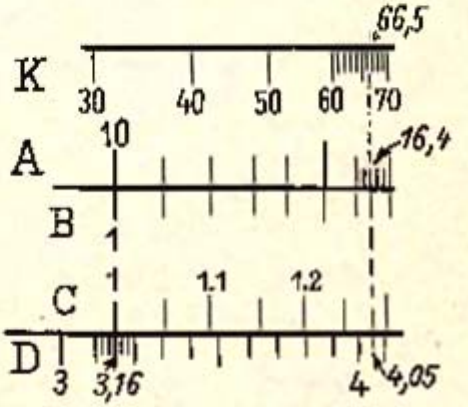


Bild 17. $\sqrt{10} = 3{,}16$; $4{,}05^2 = 16{,}4$; $4{,}05^3 = 66{,}5$

Der Ingenieur: Nehmen wir ein praktisches Beispiel. Sie wissen ganz gewiß noch von der Schule her, daß $12 \cdot 12 = 144$ ist. Wenn Sie nun das Quadrat von 1,2 aufsuchen, so finden Sie, daß $1{,}2^2 = 1{,}44$ ist. Da $144 = 100 \cdot 1{,}44$ ist, können Sie auch sagen: $144 = 10^2 \cdot 1{,}2^2$. Um das Quadrat einer Zahl > 10 zu finden, teilen Sie diese Zahl also durch so viel Dezimalstellen, bis sie kleiner als 10 ist, quadrieren beide Zahlen für sich und multiplizieren die Quadrate miteinander. Das hört sich alles viel schlimmer an als es ist. Es ist wirklich sehr einfach. Ein paar Beispiele:

$547^2 = 5{,}47^2 \cdot 100^2 = 30 \cdot 10\,000 = 300\,000 = 3 \cdot 10^5$; $3760^2 = 3{,}76^2 \cdot (10^3)^2 = \text{ca. } 14{,}2 \cdot 10^6$; $3760^3 = 3{,}76^3 \cdot (10^3)^3 = 53{,}2 \cdot 10^9$; $547^3 = 5{,}47^3 \cdot 100^3 = 5{,}47^3 \cdot (10^2)^3 = 164 \cdot 10^6$. Prüfen Sie bitte all diese Aufgaben mit Ihrem Rechenschieber nach!

14. Stunde:
Der Rechenschieber III

Quadratwurzeln von Zahlen über 100 – Links oder rechts, das ist die Frage – Nicht die falsche Seite wählen! – Nicht falsch ablesen! – Die Kubikwurzel – Die „1" ist die Grenze – Wurzelziehen kann auch vergrößern – Das Gesetz des Wachstums.

Der Praktiker: Die Bildung von Quadraten und von Kubikzahlen von Zahlen über 10 ist ja wirklich nicht schlimm und leicht zu begreifen. Wie finde ich nun aber die Quadratwurzeln von Zahlen über 100? Die Rechenschieberskalen A und B gehen doch nur bis 100! Wie finde ich z. B. die Quadratwurzel von 840?

Der Ingenieur: Hier vollzieht sich der umgekehrte Vorgang. Es ist $\sqrt{840} = \sqrt{8{,}4} \cdot \sqrt{100} = 2{,}9 \cdot 10 = 29$. Suchen Sie die Wurzel von 8400, so ist $\sqrt{8400} = \sqrt{84} \cdot \sqrt{100} = 9{,}165 \cdot 10 = 91{,}65$. Und bei noch größeren Zahlen: $\sqrt{84\,000} = \sqrt{8{,}4} \cdot \sqrt{10\,000} = 2{,}9 \cdot 100 = 290$; $\sqrt{840\,000} = \sqrt{84} \cdot \sqrt{10\,000} = 9{,}165 \cdot 100 = 916{,}5$. Sie müssen die Zahl, von der Sie die Quadratwurzel ziehen wollen, also immer durch 100 oder durch Potenzen von 100 (100^2, 100^3, 100^4 ...) teilen. Sie müssen aber immer darauf achten, ob Sie die Zahl, von der Sie die Wurzel finden wollen, auf der linken Seite oder auf der rechten Seite der Skala A einstellen müssen. Hierbei werden die meisten Fehler gemacht.

Der Praktiker: Die Ablesegenauigkeit beim Rechenschieber ist doch begrenzt. Für $\sqrt{2}$ z. B. kann man höchstens 1,41 ablesen. Was macht man nun, wenn man genauere Resultate haben will?

Der Ingenieur: Sie haben recht, die Genauigkeit beim Rechenschieber ist begrenzt. Schon die vierte Stelle kann man nicht mehr zuverlässig ablesen. Es ist z. B. $\sqrt{2} = 1{,}41421$. Gewöhnlich bricht man

nach der dritten Ziffer hinter dem Komma ab: $\sqrt{2} = 1{,}414$. Will man die genauen Quadratzahlen und Quadratwurzeln haben, so nimmt man Tabellen zur Hand, wie wir sie später noch kennenlernen werden. Für überschlägige Rechnungen aber genügt völlig die Genauigkeit des Rechenschiebers.

Wenn Sie die Wurzel einer Zahl suchen, dann besteht die große Gefahr, daß Sie auf der falschen Seite der Skala A suchen. Wollen Sie z. B. $\sqrt{2000}$ wissen, und Sie gehen von „2" der Skala A zur Skala D hinunter, so erhalten Sie ein falsches Resultat. Denn Sie müssen 2000 zerlegen in $20 \cdot 100$. Sie müssen also von „20" der Skala A zur Skala D gehen: $\sqrt{20} = 4{,}47$, $\sqrt{2000} = 4{,}47 \cdot 10 = 44{,}7$. Sie müssen also darauf achten, daß Sie auf der richtigen Seite der Skala A die Wurzel suchen!

Der Praktiker: Demnach sind Wurzeln von ungeradstelligen Zahlen auf der Skala A zwischen 1 und 10, Wurzeln von geradstelligen Zahlen sind zwischen 10 und 100 der Skala A einzustellen. Die Wurzel von ungeradstelligen Zahlen muß zwischen 1...3,16, die von geradstelligen Zahlen zwischen 3,16...10 liegen.

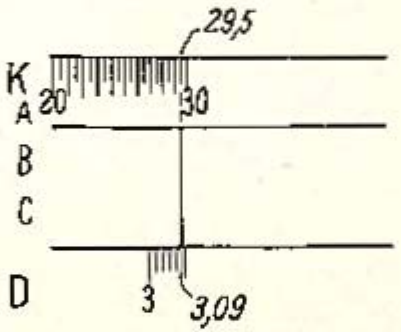


Bild 18. $\sqrt[3]{29{,}5} = 3{,}09$

Der Ingenieur: Richtig! Das gilt für alle Zahlen! Bei Zahlen über 100 ist das Resultat auf der Skala D eben nur noch mit 10 oder 100 usw. zu multiplizieren.

Der Praktiker: Eigentlich kann man die Quadrate und die Quadratwurzeln doch auch auf der Zunge ablesen!

Der Ingenieur: Gewiß! Es ist aber zweckmäßig, daß man nur mit den Skalen A und D oder mit den Skalen B und C rechnet, nicht aber mit B...D oder mit A...C. Wenn einmal die Zunge etwas verschoben ist, gibt es ein völlig falsches Resultat. Deshalb arbeitet man besser nur mit den genannten Skalen.

Nun bleibt noch übrig, die Kubikwurzel zu suchen. Die Zahl, von der man die Kubikwurzel ziehen will, sucht man auf der Skala K auf; die Kubikwurzel findet man dann auf der Skala D.

Als Beispiel finden Sie in Bild 18 $\sqrt[3]{29{,}5} = 3{,}09$. Wieviel ist also $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{100}$, $\sqrt[3]{1000}$?

Der Praktiker: Es ist $\sqrt[3]{10} = 2{,}15$; $\sqrt[3]{100} = 4{,}64$; $\sqrt[3]{1000} = 10$.

Der Ingenieur: Wenn Sie den Läufer so stellen, daß sein Mittelstrich auf der 10 der Skala K steht, so trifft diese Mittellinie die Skala D zwischen 2,15 und 2,16. Ich würde also sagen: $\sqrt[3]{10} = 2{,}155$.

Wieviel ist $\sqrt[3]{3{,}6}$; $\sqrt[3]{36}$; $\sqrt[3]{360}$?

Der Praktiker: Es ist $\sqrt[3]{3{,}6} = 1{,}53$; $\sqrt[3]{36} = 3{,}3$; $\sqrt[3]{360} = 7{,}1$.

Der Ingenieur: Wieviel ist $\sqrt[3]{1260}$; $\sqrt[3]{54\,400}$?

Der Praktiker: Diese Zahlen sind über 1000; ich muß sie infolgedessen in zwei Faktoren zerlegen, wovon einer $10^3 = 1000$ oder das Mehrfache davon ist. Also ist $\sqrt[3]{1260} = \sqrt[3]{1{,}26} \cdot \sqrt[3]{1000} = 1{,}08 \cdot 10 = 10{,}8$; $\sqrt[3]{54\,400} = \sqrt[3]{54{,}4} \cdot \sqrt[3]{1000} = 3{,}79 \cdot 10 = 37{,}9$.

Wir haben bisher nur immer mit Zahlen > 1 gerechnet. Das war ja alles nicht schlimm. Wie ist es aber mit Zahlen zwischen 1...0?

Der Ingenieur: Sie haben richtig erkannt, daß die „1" eine Scheidegrenze ist. Da $1^1 = 1$, $1^2 = 1$, $1^4 = 1$, $1^n = 1$, ist auch $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[4]{1} = 1$, $\sqrt[n]{1} = 1$. Und damit sind alle Potenzen und alle Wurzeln von Zahlen, die größer sind als eins, auch wiederum größer als eins. Und alle Potenzen und alle Wurzeln von Zahlen, die kleiner als eins sind, sind auch wiederum kleiner als eins. Und noch ein weiterer wesentlicher Unterschied: Potenzen von Zahlen größer als eins sind stets größer als die betreffenden Grundzahlen; Potenzen von Zahlen kleiner als eins sind dagegen stets kleiner als die betreffende Grundzahl: $0{,}1^2 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$; $1/4^2 = 1/4 \cdot 1/4 \cdot 1/4 = 1/64$.

Bei Wurzeln ist es umgekehrt: Wurzeln von Zahlen kleiner als eins sind dagegen stets größer als der betreffende Radikand: z. B. $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$; $\sqrt[3]{1/64} = 1/4$.

Der Praktiker: Das ist ja eigenartig! Bisher habe ich mit dem Wort „Wurzel aus" immer den Begriff von etwas kleinerem verbunden. Und hier stellt sich mit einem Male heraus, daß eine Wurzel größer sein kann als ihre Grundzahl, als ihr Radikand!

Der Ingenieur: Wenn Sie sich die Dinge richtig überlegen, kommt Ihnen das durchaus nicht mehr so ungewöhnlich vor.

Es ist doch

$$\sqrt{0{,}01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10} = 0{,}1; \text{ und } \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$$

Das Ganze läuft also darauf hinaus, daß ein Bruch aus zwei Zahlen besteht, von denen die größere Zahl schneller wächst als die kleinere, wenn man sie potenziert. Bei einem echten Bruch (< 1) ist der Nenner größer; infolgedessen wächst auch der Nenner schneller als der Zähler. Das heißt aber nichts anderes, als daß der Bruch kleiner wird. Ist der Zähler größer als der Nenner (> 1, unechter Bruch), so wächst der Zähler schneller: der Bruch wird durch das Potenzieren größer.

Beim Radizieren oder Wurzelziehen ist es umgekehrt. Beim echten Bruch (< 1) wird der Nenner schneller kleiner als der Zähler: der Bruch wird durch das Radizieren größer. Und beim unechten Bruch (> 1) wird durch das Radizieren der Zähler schneller kleiner als der Nenner: der Bruch wird kleiner. Sind Zähler und Nenner gleich groß, so verändert sich ihr Verhältnis weder durch das Potenzieren noch durch das Radizieren, es bleibt immer gleich eins.

Diese Überlegungen gelten auch für Dezimalbrüche, denn jeder Dezimalbruch läßt sich ja auch durch einen gemeinen Bruch ausdrücken.

Der Praktiker: Ihre Beweisführung erscheint durchaus logisch. Man muß sich eben immer vor Augen halten, daß die „1" die Scheidegrenze beim Potenzieren und Radizieren ist.

15. Stunde:
Der Rechenschieber IV

Potenzen und Wurzeln von Brüchen – Dezimalbrüche zum Radizieren zweistellig machen! – $U^{2/3}$ mit dem Rechenschieber – $U^{2/3}$ ist ebenso leicht.

Der Ingenieur: Nach diesen Überlegungen können wir jetzt darangehen, auch von Brüchen die Potenzen zu bilden und die Wurzeln zu ziehen.

Wieviel ist $0{,}25^2$; $0{,}707^2$; $0{,}063^3$; $\left(\frac{1}{24}\right)^3$; $\left(2\frac{3}{4}\right)^3$; $\sqrt{0{,}7}$; $\sqrt[3]{0{,}84}$; $\sqrt[3]{0{,}084}$; $\sqrt{\frac{9}{25}}$; $\sqrt[3]{\frac{50}{100}}$?

Der Praktiker: Es ist $0{,}25 = \frac{25}{100}$, $0{,}25^2$ mithin $\frac{25^2}{100^2} = \frac{625}{10^4} = 0{,}0625$;

$0{,}707^2 = \frac{7{,}07^2}{10^2} = \frac{50}{100} = 0{,}5$; $0{,}063^3 = \frac{6{,}3^3}{(10^2)^3} = \frac{250}{10^6} = 0{,}00025 = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$

Der Ingenieur: Ich dachte ja, Sie würden über diese Aufgabe stolpern. Daß $6{,}3^2$ runde 250 ergibt, erscheint auf den ersten Blick sehr hoch. Und $(10^2)^3$ ist $10^{2 \cdot 3}$ und nicht etwa 10^{3^2}.

Der Praktiker: Es ist $\left(\frac{1}{24}\right)^2 = \frac{1}{576}$; $\left(2\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{11}{4}\right)^3 = \frac{121}{16} = 7\frac{9}{16}$;

$\sqrt{0{,}7} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}} = \frac{2{,}64}{3{,}16} = \frac{0{,}66}{0{,}79}$.

Der Ingenieur: Falsch ist es ja nicht direkt, was Sie soeben gerechnet haben. Aber sehen Sie sich das Resultat an. Schön ist anders. Sie erhalten als Resultat einen echten Bruch, bei dem Zähler und Nenner wiederum Dezimalbrüche sind. Ganz anders und viel eleganter wird es, wenn Sie Zähler und Nenner des Potenzbruches mit 10 multiplizieren. Sie erhalten dann:

$\sqrt{0{,}7} = \frac{\sqrt{70}}{\sqrt{100}} = \frac{8{,}36}{10} = 0{,}836$. Sie müssen also immer darauf achten, daß bei der Quadratwurzel als Nenner eine 100 oder ihr Mehrfaches und bei der Kubikwurzel eine 1000 oder ihr Mehrfaches vorkommt. Sie müssen also hinter dem Komma bei Quadratwurzeln immer je 2 Stellen, bei Kubikwurzeln immer je 3 Stellen abteilen. Wenn die Teilung nicht aufgeht, so setzen Sie für fehlende Stellen am Schluß eine Null.

Der Praktiker: Demnach ergibt $\sqrt[3]{0{,}64} = \frac{\sqrt[3]{640}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{8{,}6}{10} = 0{,}86$ und

$\sqrt[3]{0{,}064} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{1000}} = 0{,}4$. Weiter ist $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$ und $\sqrt[3]{\frac{50}{100}} =$

$= \frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{1000}} = 0{,}793$. Beim letzten Beispiel könnte man dort aber kürzen:

$\sqrt[3]{\frac{50}{100}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Da käme doch wohl etwas anderes heraus, da die Kubikwurzel von 1 wiederum 1 ist, also $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1{,}26}$

Der Ingenieur: Rechnen Sie doch einmal weiter aus: $1 : 1{,}26 = 0{,}793$. Sie sehen, es kommt doch dasselbe heraus. Die „1" bringt also keine Verwirrung, sondern paßt genau in das Zahlensystem hinein!

Sie können jetzt sogar schon komplizierte Zahlenrechnungen mit dem Rechenschieber ausführen: $a^3/^2$-Potenzen können Sie bilden. Sie

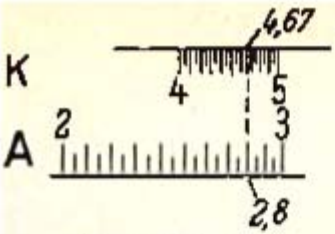


Bild 19. $2{,}8^{3/2} = 4{,}67$

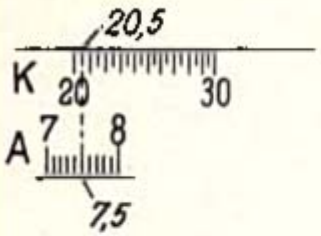
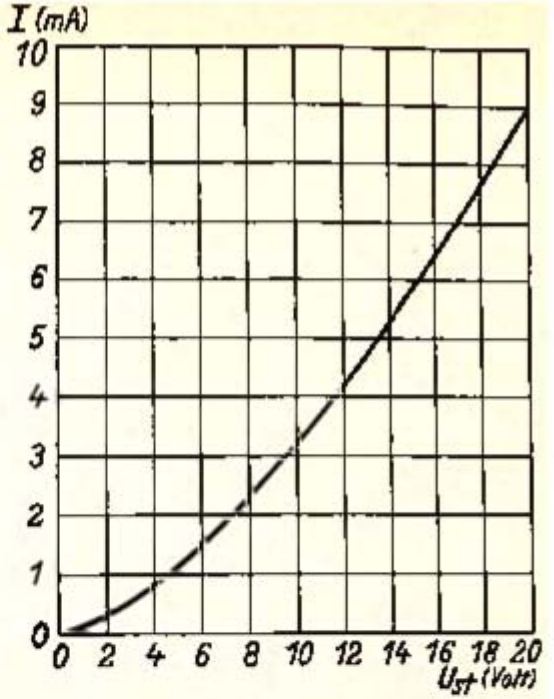


Bild 20. $7{,}5^{3/2} = 20{,}5$

Rechts:
Bild 21. Eine $U^{3/2}$-Kennlinie



wissen ja, daß der Elektronenstrom einer Röhre im Raumladegebiet nach dem $U^{3/2}$-Gesetz ansteigt. Es ist $U^{3/2} = \sqrt{U^3}$; das hatten wir ja schon in der neunten Stunde kennengelernt. Sie können diese Rechnung in zwei Zügen erledigen. Zunächst stellen Sie den a-Wert bzw. den U-Wert auf der Skala A ein, lesen davon die Wurzel auf der Skala D ab, und lesen von diesem Wert der Skala D die dritte Potenz auf der Skala K ab. Sie können aber noch weiter vereinfachen und auf die ganze Zwischenrechnung verzichten: Stellen Sie den Wert der Grundzahl auf der Skala A ein, so können Sie auf der darüberstehenden Skala K gleich den $U^{3/2}$-Wert ablesen!

Der Praktiker: Das ist ja die einfachste Sache, die es überhaupt gibt! Und ich habe mir die Ausrechnung einer $U^{3/2}$-Potenz immer sehr schwierig vorgestellt!

Der Ingenieur: Wieviel ist $2{,}8^{3/2}$; $9{,}5^{3/2}$; $7{,}5^{3/2}$?

Der Praktiker: Es ist $2{,}8^{3/2} = 4{,}67$ (siehe **Bild 19**); $9{,}5^{3/2} = \sqrt{9{,}5^3} = 29{,}2$; $7{,}5^{3/2} = 20{,}5$ (siehe **Bild 20**).

Der Ingenieur: Jetzt können Sie auch schon eine $U^{3/2}$-Kennlinie konstruieren! Es ist $I_a = K \cdot U_{St}^{3/2}$. K ist eine Konstante[1]), in unserem Falle sei $K = 1 \cdot 10^{-4}$. Dann ist bei $U_{St} = 1$ Volt, $I_a = 1 \cdot 10^{-4} \cdot 1 = 0{,}1$ mA; bei $U_{St} = 2$ Volt steht über 2 (auf der Skala A) 2,82 (auf der Skala K), also 0,282 mA usw. Es ist $U_{St} = (D \cdot U_g) + (- U_g)$.

[1]) Konstante = feststehender Wert.

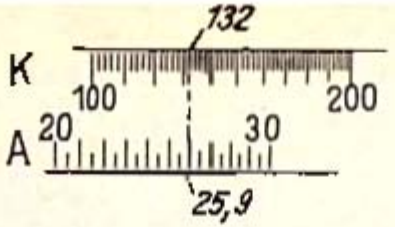


Bild 22. $132^{3/2} = 25{,}9$

Der Praktiker: Wenn man die Punkte, die man auf der Skala K abliest, in ein Kennlinienfeld einträgt, ergibt sich umstehende Kennlinie (siehe Bild 21).

Der Ingenieur: Ist $U > 100$, so fängt man wieder von vorn an, nur daß der Wert U der Skala A mit 100 und das Ergebnis auf der Skala K mit 1000 zu multiplizieren ist.

Die Umkehrung der Rechenoperation $U^{3/2}$ wäre die Potenzierung mit $a^{2/3}$ bzw. $U^{2/3} = \sqrt[3]{U^2}$. Da stellt man den Wert U auf der Skala K ein und liest das Resultat auf der Skala A ab. Es ist also genauso leicht. Wieviel ist also $132^{3/2}$; 25^2; 25^3; $25^{3/2}$; $25^{2/3}$?

Der Praktiker: Es ist $132^{3/2} = 25{,}9$ (siehe **Bild 22**), $25^2 = 625$; $25^3 = 15\,600$; $25^{3/2} = 125$; $25^{2/3} = 8{,}55$. Genau bis auf die letzte Stelle sind die Resultate allerdings nicht!

Der Ingenieur: Das brauchen sie auch gar nicht zu sein. Für die meisten Fälle genügt diese Genauigkeit.

Sie haben schon an dem bisher Gesagten erkennen können, welch nützliche Einrichtung der Rechenschieber ist. Aufgaben, die sonst äußerst schwierig auszurechnen wären, kann man mit Leichtigkeit lösen. Seine Hauptanwendung findet der Rechenschieber aber beim Multiplizieren und beim Dividieren. Das werden wir in der nächsten Stunde kennenlernen.

16. Stunde:
Der Rechenschieber V

Der neue Rechenschieber sieht anders aus! – Multiplikation mit dem Rechenschieber – Division mit dem Rechenschieber – Nicht schematisch arbeiten, sondern mit Überlegung! – Ermittlung der Stellenzahl.

Der Praktiker: Ich habe mir jetzt auch einen Rechenschieber gekauft. Ich muß aber feststellen, daß er anders aussieht als der Schulrechenstab, den Sie mir geliehen haben. Die Bezeichnungen A, B, C und D stehen nicht darauf, und die Skala K fehlt völlig. Da kann man denn ja gar keine Kubikzahlen und Kubikwurzeln finden, und die 3/2- und die 2/3-Potenz kann man überhaupt nicht bilden (**Bild 23**). Ich finde das sehr unpraktisch.

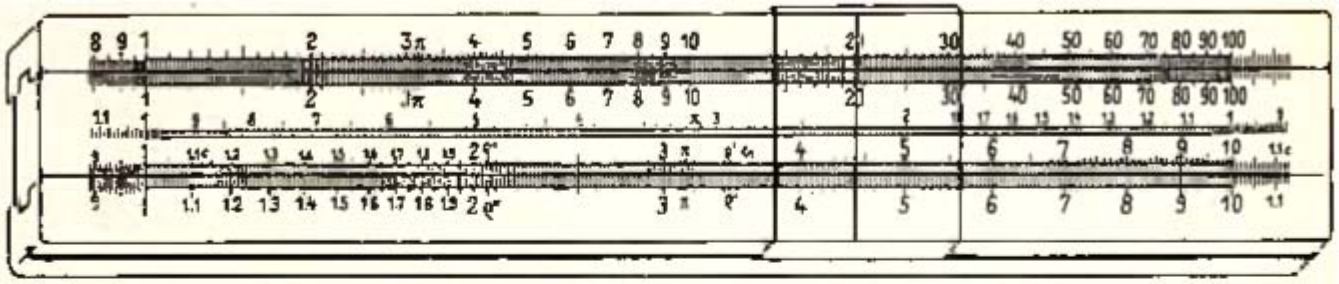


Bild 23. Ein Normalrechenstab mit Reziprokskala

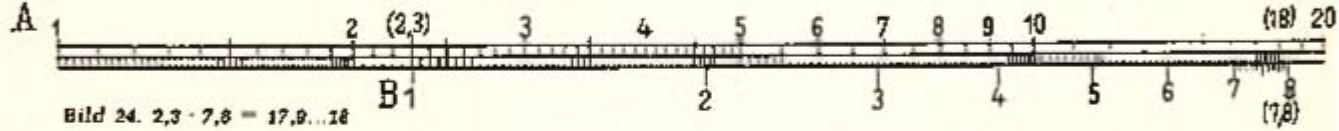


Bild 24. 2,3 · 7,8 = 17,9...18

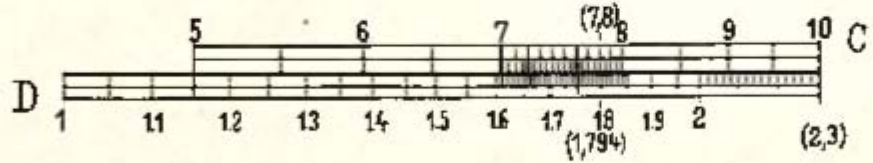
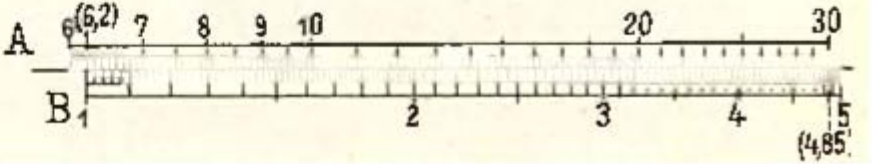


Bild 25. 2,3 · 7,8 = 17,94

Bild 26. 6,2 · 4,85 = 30,07



Der Ingenieur: Wenn auf Ihrem Rechenschieber auch nicht die Bezeichnungen A, B, C und D stehen, so sind es doch dieselben Skalen. Wir werden deshalb diese Skalen nach wie vor mit A, B, C und D bezeichnen, damit einwandfrei feststeht, welche Skala jeweils gemeint ist. Obgleich die Skala K fehlt, kann man aber auch die 3. Potenz und die 3. Wurzel finden und kann auch die 3/2- und die 2/3-Potenz bilden. Wir werden diese Fälle nachher behandeln.

Zunächst aber wollen wir uns dem Hauptanwendungsgebiet des Rechenschiebers zuwenden: der Multiplikation und der Division. Bei der Multiplikation und bei der Division arbeiten die festen Skalen mit der benachbarten Skala der Zunge zusammen, also die Skala A mit der Skala B und die Skala D mit der Skala C.

Der Praktiker: Ich habe gefunden, daß der eine sich angewöhnt, mit den Skalen A und B zu arbeiten, und ein anderer arbeitet nur mit den Skalen C und D. Was ist nun eigentlich empfehlenswerter?

Der Ingenieur: Man soll sich überhaupt nicht auf eine bestimmte Art festlegen. Will man eine Multiplikations- oder Divisionsaufgabe schnell überschläglich lösen, benutzt man die Skalen A und B. Will man aber ein möglichst genaues Resultat wissen, so arbeitet man mit den Skalen C und D.

Zunächst wollen wir mit den Skalen A und B multiplizieren. Die Aufgabe sei: 2,3 · 7,8. Wir suchen (siehe **Bild 24**) auf der Skala A 2,3 auf und stellen hierunter die „1" der Skala B, also den Anfang dieser Skala. Nun suchen wir 7,8 auf der Skala B und schieben den Mittelstrich des Läufers auf diese 7,8. Dann kann man unter dem Läufer-Mittelstrich auf der Skala A das Resultat ablesen. Das Produkt steht also auf der Skala A direkt über der 7,8 der Skala B und ist zwischen 17,9 und 18.

Dieselbe Rechnung kann man auf den Skalen C und D vornehmen. Probieren Sie es einmal.

Der Praktiker: Zunächst suche ich auf der festen Skala D den Wert 2,3 auf und stelle darüber den Anfang („1") der Skala C. Doch was sehe ich? Das geht ja gar nicht zu rechnen. Der Wert 7,8 der Skala C liegt ja weit außerhalb der Skala D!

Der Ingenieur: In einem solchen Falle stellt man nicht den Anfang, sondern das Ende der Skala C über den ersten Faktor. Anfang und Ende der Skala sind gleichwertig: es ist stets 1 bzw. das Zehnfache von 1.

Der Praktiker: Also ich stelle das Ende der Skala C (= 10) über 2,3 der Skala D und stelle den Mittelstrich des Läufers auf 7,8 der Skala C. Darunter, auf der Skala D, steht dann der Läufer-Mittelstrich zwischen 1,79 und 1,8 oder noch genauer: kurz vor 1,795 (**Bild 25**). Das Resultat ist also 17,94.

Der Ingenieur: Sie sehen also, das Resultat ist auf den Skalen C und D eine Stellenzahl genauer als auf den Skalen A und B. –

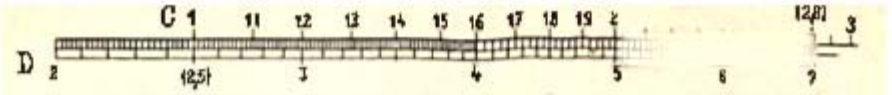


Bild 27. 2,5 · 2,8 = 7

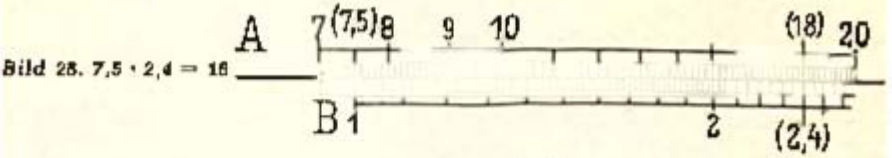


Bild 28. 7,5 · 2,4 = 18

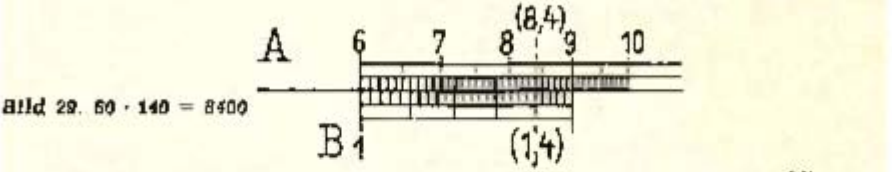


Bild 29. 60 · 140 = 8400

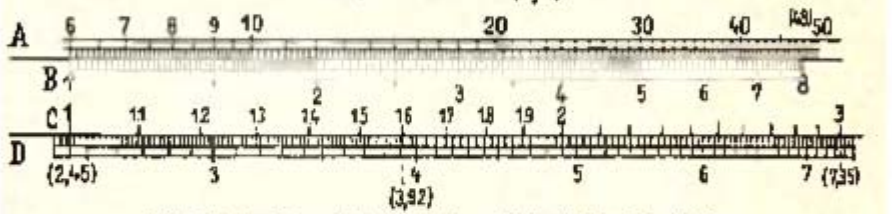


Bild 30. 6 · 0,8 = 4,8; 7,35 : 3 = 2,45; 39,2 : 16 = 2,45

Bild 31. 210 : 28 = 7,5; 4,5 : 6 = 0,75

Nun noch einige Multiplikationsaufgaben. Wieviel ist a) 6,2 · 4,85; b) 2,5 · 2,8; c) 7,5 · 2,4; d) 60 · 140; e) 6 · 0,8?

Der Praktiker: Es ist 6,2 · 4,85 ≈ 30 (genau: 30,07) (Skalen A und B in **Bild 26**); 2,5 · 2,8 = 7 (Skalen C und D in **Bild 27**). Weiter ist 7,5 · 2,4 = 18 (**Bild 28**), 60 · 140 = 8400 (**Bild 29**); 6 · 0,8 = 4,8 (**Bild 30**). Die Multiplikation bereitet ja wirklich weiter keine Schwierigkeiten. Man muß nur auf die Stellenzahl achten.

Wie ist es aber mit der Division?

Der Ingenieur: Bei der Division ist das Verfahren umgekehrt. Man sucht zunächst auf der feststehenden Skala A (oder D) den Dividend (den Zähler) auf, stellt darüber den Divisor (den Nenner) auf der Skala B (oder C) der Zunge, und liest am Anfang oder Ende der Skala B (oder C) das Resultat, den Quotienten, ab. Natürlich arbeitet

auch hier wieder die Skala A mit der Skala B und die Skala C mit der Skala D zusammen.

Das hört sich alles sehr schlimm an, ist aber sehr einfach. Nehmen wir als Beispiel die Aufgabe 7,35 : 3 (siehe Bild 30 unten). Über den Wert 7,35 auf der Skala D stellt man den Wert 3 der Skala C der Zunge. Unter der 1 der Skala C findet man auf der Skala D den Wert 2,45. Ebenso finden wir 39,2 : 16 = 2,45 (Bild 30 unten).

Wieviel ist 210 : 28 und 4,5 : 6?

Der Praktiker: Es ist 210 : 28 = 7,5 und 4,5 : 6 = 0,75 **(Bild 31).**

Die ersten Divisionsaufgaben haben wir mit den Skalen C und D gelöst. Man kann das doch auch genau so gut mit den Skalen A und B machen, wie bei den letzten Aufgaben?

Der Ingenieur: Gewiß! Im allgemeinen wird man aber wegen der größeren Genauigkeit mit den Skalen C und D arbeiten. Bei der Division braucht man ja nicht wie bei der Multiplikation darauf zu achten, ob man die Zunge nach der richtigen Seite geschoben hat. Man stellt den Divisor über den Dividend und liest den Quotienten unter dem Ende der Zunge ab, das sich innerhalb des Rechenschieberkörpers befindet. Es liegt also keine Veranlassung vor, mit den Skalen A und B zu arbeiten, denn dort geht es auch nicht schneller.

Der Praktiker: Trotzdem ist es, glaube ich, nicht ratsam, das Dividieren allein mit den Skalen C und D zu üben. Will ich z. B. die Wurzel aus einem Bruch ziehen, so ist es doch wohl besser, den Bruch, also die Divisionsaufgabe, mit den Skalen A und B auszurechnen, da ich dann sofort von dem Quotienten die Wurzel ziehen kann.

Der Ingenieur: Sehr richtig! Es kommt beim Stabrechnen überhaupt darauf an, daß man nicht schematisch arbeitet, sondern mit Vernunft und Überlegung. Man kann viel unnütze Arbeit sparen; nur dann kann man wirklich den Rechenstab ausnutzen.

Der Praktiker: Im Grunde genommen ist ja das Dividieren noch bequemer als das Multiplizieren. Beim Dividieren kann man die Zunge nie verkehrt ziehen. Es stimmt immer gleich. Ob man am rechten oder am linken Ende der Zunge ablesen muß, sieht man ja sofort.

Schwierig ist es nur mit der Zahl der Stellen, die das Resultat haben muß. Gibt es da keine Regel?

Der Ingenieur: Doch! Man muß unterscheiden, ob die Zunge beim Arbeiten auf den Skalen C und D nach links oder nach rechts herausgezogen wird.

Wird die Zunge nach der linken Seite herausgezogen, so ist bei der Multiplikation die Stellenzahl des Produktes genauso groß wie die Summe der Stellenzahlen der Faktoren vor dem Komma zusammen; bei der Division ist die Stellenzahl des Quotienten genauso groß wie die Differenz der Stellenzahlen vor dem Komma.

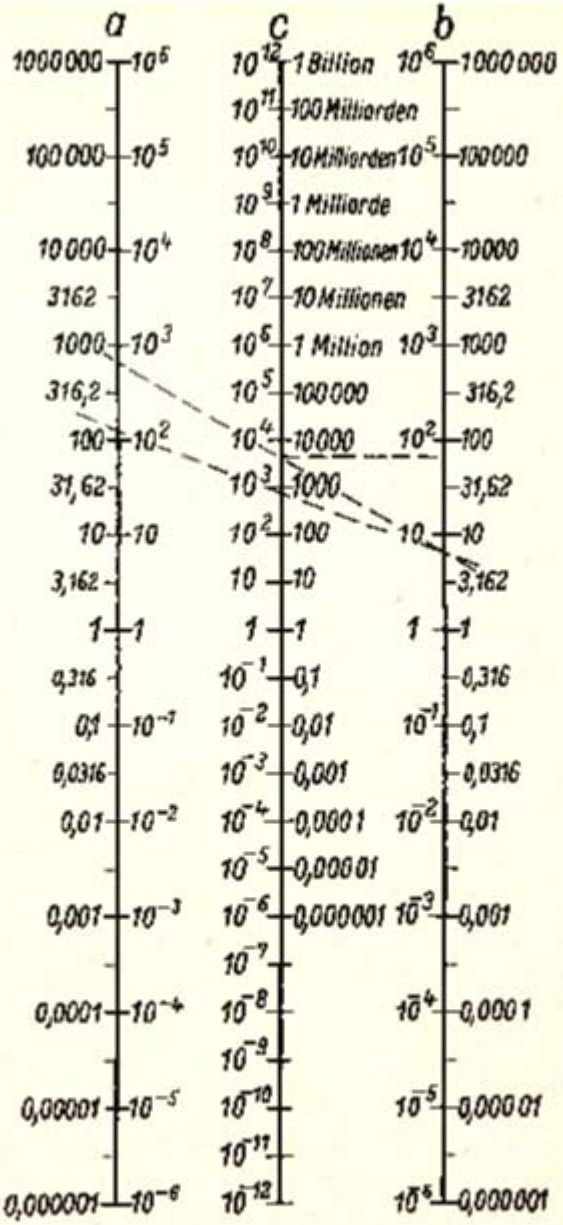


Bild 32. Stollenwart-Nomogramm

Wird die Zunge nach der rechten Seite herausgezogen, so ist bei der Multiplikation eine Stelle abzuziehen, bei der Division eine Stelle hinzuzuzählen.

Der Praktiker: Wir wollen doch gleich mal sehen, wie diese Regel auf die bisher gebrachten Beispiele paßt: Bei $2{,}3 \cdot 7{,}8$ wird die Zunge nach links herausgezogen. Infolgedessen hat das Produkt $1 + 1 = 2$ Stellen vor dem Komma: $2{,}3 \cdot 7{,}8 = 17{,}94$. Und umgekehrt: $17{,}94 : 2{,}3 = 7{,}8$, denn $2 - 1 = 1$.

Der Ingenieur: Man kann die Stellenzahl auch aus dem Stellenwert-Nomogramm auf Seite 69 entnehmen (siehe Bild 32). Bei der Multiplikation sucht man die Faktoren auf den Leitern a und b auf und verbindet sie durch eine Linie. Auf der Leiter c kann man den Stellenwert des Produktes entnehmen. Und bei der Division sucht man den Dividend (die größte Zahl) auf der Leiter c auf, den Divisor auf der Leiter a. Verbindet man beide Punkte, so schneidet diese Verbindungslinie in ihrer Verlängerung die Leiter b dort, wo sich die Stellenzahl des Quotienten ergibt. Einige Beispiele: $7{,}2 \cdot 120{,}3$. Man verbinde 120,3 auf Leiter a mit 7,2 auf Leiter b (nur ungefähr). a wird zwischen 100 und 1000 geschnitten, so daß das Resultat 866 und nicht etwa 86,6 lautet. Oder: $5184 : 720$. Man verbinde 5184 auf Leiter c mit 720 auf Leiter a. Die Verlängerung der Verbindungslinie beider Punkte schneidet die Leiter c bei 7,2. Will man die Wurzel ziehen, so suche man auf der Leiter c den Radikand auf und ziehe von dort eine Waagerechte zur Leiter a oder b. Z. B. ist $\sqrt{5184} = 72$, wie man aus Bild 32 entnehmen kann. Und beim Quadrieren ist der Vorgang umgekehrt: $72^2 = 5184$.

Der Praktiker: Wo sehe ich denn, daß bei $5184 : 720$ der Wert 7,2 herauskommt? Ich sehe nur, daß es ein Punkt zwischen 3,162 und 10 ist!

Der Ingenieur: Mit der Stellenwerttafel sollen Sie ja nur den Stellenwert feststellen, das genaue Resultat müssen Sie mit dem Rechenschieber errechnen! Bei der Stellenwerttafel ist noch zu beachten, daß die Leitern logarithmische Teilung haben. Dementsprechend liegt in der Mitte zwischen 1 und 10 nicht 5, sondern 3,162.

17. Stunde:
Der Rechenschieber VI

Der Rechenschieber kann noch mehr. Kettenaufgaben – Kapazitätsberechnung – Halbe Arbeit – schnelleres Ergebnis – Die Stellenzahlregeln sind problematisch, weil schwer zu behalten – Der Rechenschieber ersetzt nicht das Denken! – Tabellenbildung: Multiplikation – Anodenwechselspannung $U_{a\,eff} = \sqrt{P_a \cdot R_a}$.

Der Ingenieur: Der Rechenschieber beweist seine Nützlichkeit vor allem dann, wenn man mehrere Multiplikationsaufgaben und Divisionsaufgaben hintereinander vorzunehmen hat.

Nehmen wir einmal eine praktische Aufgabe. Es soll die Kapazität eines Glimmerblockkondensators berechnet werden, der aus 6 Platten besteht, die je 2 × 3 cm groß und 0,8 mm voneinander entfernt sind Die Formel hierfür ist:

$$C = \frac{1{,}11 \cdot \varepsilon \cdot F \cdot (n-1)}{0{,}4 \cdot \pi \cdot a}\ ;\ C \text{ in pF, } F \text{ in cm}^2, \text{ a in mm.}$$

Der Praktiker: Kann man die Einheiten pF bzw. cm² nicht gleich hinter C bzw. F als eingeklammerten Index schreiben?

Der Ingenieur: Das ist nach DIN 1313 nicht zulässig, weder in runden noch in eckigen Klammern. Man kann die Einheit danach auch als Divisor schreiben C/pF bzw. F/cm² oder $\frac{C}{pF}$ bzw. $\frac{F}{cm^2}$.
Am klarsten dürfte aber die oben angewandte Schreibweise sein.

Der Praktiker: Was bedeuten ε und die anderen Buchstaben?

Der Ingenieur: ε ist die Dielektrizitätskonstante, sie ist für Glimmer mit 7 anzusetzen. F ist die Plattenoberfläche, also 2 · 3 = 6 cm², n ist die Zahl der Platten, und a der Abstand zweier Platten voneinander, also 0,8 mm. Die Aufgabe lautet also:

$$\frac{1{,}11 \cdot 7 \cdot 6 \cdot (6-1)}{0{,}4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}8}$$

Für π braucht man den Wert nicht lange zu suchen. Auf jeder Skala ist bei 3,14 eine Marke für π.
Rechnen Sie einmal die Aufgabe auf den Skalen C und D aus!

Der Praktiker: Zunächst multipliziere ich ohne Berücksichtigung der Stellenzahl. Ich stelle über die 1,11 (Skala D) den Strich 1 der Skala C und lese unter der 7 (der Skala C) 7,77 auf der Skala D. Über diese Zahl stelle ich jetzt die 10 der Skala C und lese unter der 6 der

Skala C auf der Skala D 4,66 ab. An diese Stelle bringe ich jetzt wieder die 10 der Skala C; unter der 5 (6 – 1) der Skala C lese ich jetzt auf der Skala D 2,33. Jetzt dividiere ich und schiebe die Zunge nach rechts, bis die 4 der Skala C an dieser Stelle ist. (Zum Festhalten des Zwischenwertes schiebe ich immer den Läufer an die betreffende Stelle über den Zwischenwert.) Am Ende der Skala C, unter der 10, liest man auf der Skala D 5,83. Hierher stellt man jetzt die Marke π der Skala C. Unter dem Anfang der Skala C, unter der 1, liest man auf der Skala D 1,856. Hierher stellt man die 8 und liest unter der 10 der Skala C auf der Skala D das Ergebnis 2,32. Nun ist noch die die Stellenzahl zu überlegen. Hierzu nimmt man am besten die Stellenwerttafel Bild 32 zu Hilfe. Es ergibt sich, daß C = 232 pF groß ist.

Der Ingenieur: Man kann so rechnen; richtig ist es wohl, aber nicht praktisch. Sie haben die Zunge im ganzen sechsmal hin und her bewegen müssen. Dividieren und multiplizieren Sie aber abwechselnd, so haben Sie nur die halbe Arbeit, das Ergebnis ist doppelt so schnell ausgerechnet. Also: $1{,}11 : 0{,}4 \cdot 7 : \pi \cdot 6 : 0{,}8 \cdot 5$. Über 1,11 der Skala D wird die 4 (Skala C) gestellt. Um das Ergebnis kümmern wir uns erst gar nicht, sondern schieben den Läufer gleich über die 7 der Skala C. Damit haben wir das unbekannte Ergebnis sofort mit 7 multipliziert. Jetzt verschieben wir die Zunge, bis die Marke π unter dem Läuferstrich steht und schieben dann den Läufer auf die 6 (Skala C). Damit haben wir zugleich durch π dividiert und mit 6 multipliziert. Und als dritten und letzten Gang schieben wir die 8 (Skala C) unter den Läuferstrich und verschieben anschließend den Läufer auf die 5 (Skala C). Darunter lesen wir auf der Skala D: 2,32. Also warum umständlich, wenn es einfacher geht?

Der Praktiker: Tatsächlich, das geht ja sehr viel schneller! Hier sieht man erst so richtig die Vorteile des Stabrechnens. Ohne Rechenschieber müßte man drei Multiplikations- und drei Divisionsaufgaben ausrechnen. Beim Rechenschieber spart man sich auch die Arbeit des Kürzens. Man braucht sich nicht um die Zwischenergebnisse zu kümmern, sondern verschiebt nur abwechselnd die Zunge und den Läufer. Ich sehe allmählich ein, daß das Rechnen mit dem Rechenschieber keine „Angabe", sondern sehr praktisch ist. Nur mit der Stellenzahl will es nicht so recht klappen. Die Stellenwerttafel ist ja sehr praktisch, aber man hat sie doch wohl in den seltensten Fällen bei der Hand, wenn man den Rechenschieber benutzt.

Der Ingenieur: Wir haben ja schon die Stellenzahlregeln behandelt. Ich gebe zu, daß es bei solch einer größeren Kettenaufgabe ein Kunststück ist, zu behalten, wie oft nun die Zunge nach links und wie oft sie nach rechts geschoben wurde. Ich habe zwar die Stellenzahlregeln beim Rechenschieber dargelegt, ihr Wert ist aber sehr umstritten. In der Praxis stellt es sich nämlich heraus, daß man es doch vergißt, wann nun eine Stelle zugezählt oder abgezogen werden

muß. Und wenn man die Stellenzahlregeln verwechselt oder falsch anwendet, ist das Resultat auch falsch. Und dann gelten die Regeln immer nur für eine Skalenart. Muß man bei größeren Aufgaben beide Teilungen (A/B und C/D) benutzen, so versagen die Stellenregeln sowieso.

Der Praktiker: Bei der Aufgabe, die Kapazität eines Kondensators zu berechnen, habe ich ja auch gefunden, daß die Stellenzahlregeln die Aufgabe nicht erleichterten, sondern erschwerten. Bei einfachen Multiplikations- und Divisionsaufgaben sind sie ja ganz praktisch. Bei Kettenaufgaben muß man aber dann, wenn man das Ergebnis schon zahlenmäßig ausgerechnet hat, noch einmal alles mit dem Rechenschieber durchgehen, um zur Stellenzahl zu kommen, vorausgesetzt, daß man die Regeln noch weiß. Sie selbst raten von den Stellenzahlregeln ab. Wie soll man dann aber die Stellenzahl ermitteln?

Der Ingenieur: Einfach durch schnelles überschlägiges Rechnen. Der Rechenschieber soll nicht zum mechanischen Rechnen ohne Überlegung verführen. Er soll nur eine Arbeitserleichterung sein. Man soll auch mit dem Rechenschieber stets kritisch rechnen, und man soll den Verlauf der Rechnung stets überwachen. In unserem Beispiel müßten wir folgendes überlegen: Es ist $1{,}11 \approx 1$; im Zähler ist $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. Im Nenner ist $3{,}14 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 3{,}14 \cdot 0{,}32 \approx 1$. Das Ergebnis kann also nur 232 und nicht 23,2 oder 2320 pF sein.

Eine weitere große Bedeutung hat der Rechenschieber bei der Tabellenbildung. Wenn Sie die 1 einer Zungenskala auf irgendeine Zahl der beigeordneten Skala des festen Teils des Rechenschiebers stellen, so können Sie sofort die ganze Multiplikationsreihe dieser Zahl ablesen. Stellen Sie z. B. auf 1,76 der Skala A ein, so können Sie nicht nur beispielsweise $6 \cdot 1{,}76$ ablesen, sondern auch alle anderen Multiplikationsaufgaben mit 1,76, sei es $12 \cdot 1{,}76$ oder $54 \cdot 1{,}76$ oder sonst einen Wert.

Die Sprechleistung einer Endröhre ist $P_a = \frac{U_a^2\,\mathrm{eff}}{R_a}$. Hieraus ergibt sich $U_{a\,\mathrm{eff}} = \sqrt{P_a \cdot R_a}$. Der Außenwiderstand R_a ist bei der EL 84 $R_a = 5{,}2\ \mathrm{k\Omega}$. Wie groß ist also der Effektivwert der benötigten Anodenwechselspannung für eine Sprechleistung $P_a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ Watt und 50 mW?

Der Praktiker: Bei $P_a = 1$ Watt ergibt sich $U_{a\,\mathrm{eff}} = \sqrt{1 \cdot 5200} = \sqrt{52} \cdot \sqrt{100} = 72$ Volt; bei $P_a = 2$ Watt ist $U_{a\,\mathrm{eff}} = \sqrt{2 \cdot 5200} = \sqrt{104} \cdot \sqrt{100} = 102$ Volt. Bei diesen beiden Rechnungen stelle ich das Ende der Skala B unter 35 (nicht etwa unter 3,5!) der Skala A, stelle den Mittelstrich des Läufers nacheinander auf 1 bzw. 2 der Skala B und lese auf der Skala D das Ergebnis ab. Damit habe ich zugleich multipliziert und radiziert. Für die weitere Rechnung muß ich den Mittelstrich des Läufers nacheinander über 3, 4, 5, 6 der Skala B stellen.

Dann kann ich unter dem Mittelstrich jeweils auf der Skala D das Ergebnis ablesen. Es ergibt sich (abgerundet) bei

$P_a = 1$ Watt: $U_{a\,eff} = 72$ Volt	$P_a = 4$ Watt: $U_{a\,eff} = 144$ Volt
$P_a = 2$ Watt: $U_{a\,eff} = 102$ Volt	$P_a = 5$ Watt: $U_{a\,eff} = 161$ Volt
$P_a = 3$ Watt: $U_{a\,eff} = 125$ Volt	$P_a = 6$ Watt: $U_{a\,eff} = 177$ Volt

Bei $P_a = 50$ mW ist $U_{a\,eff} = \sqrt{0{,}05 \cdot 5200} = \sqrt{5 \cdot 52} = 16{,}1$ Volt.
Bei $P_a = 0{,}5$ W wäre $U_{a\,eff} = \sqrt{0{,}5 \cdot 5200} = \sqrt{0{,}5 \cdot 52} \cdot \sqrt{100} =$ 51 Volt.

18. Stunde:
Der Rechenschieber VII

Anodenwechselstrom $I_{a\,eff} = \sqrt{\frac{P_a}{R_a}}$ – Dividieren mit umgekehrter Zunge – Divisionstabellen – Umwandlung von Wellenlängen in Frequenzen – Die Reziprokskala R – Das Arbeiten mit umgedrehter Zunge: dreifache Multiplikation; Kubikwurzelziehen ohne Skala K; $\sqrt[3]{a}$ und a^3, $a^{3/2}$ und $a^{2/3}$, $\sqrt[4]{a}$ und a^4, $\sqrt[5]{a}$ und a^5; Multiplikation, Division, Radizierung, alles mit einer einzigen Einstellung; Wurzelziehen aus Brüchen – Rechenschiebertips.

Der Ingenieur: Sie können auch den Anodenwechselstrom (Effektivwert) berechnen. Es ist $P_a = I_{a\,eff}^2 \cdot R_a$, also $I_{a\,eff} = \sqrt{\frac{P_a}{R_a}}$. Da $R_a = \text{const} = 5200\ \Omega$, kann man die Aufgabe gliedern in eine einmalige Division, verbunden mit der laufenden Multiplikation und Radizierung des Ergebnisses: $I_{a\,eff} = \frac{\sqrt{P_a}}{\sqrt{R_a}} = \sqrt{\frac{1}{52} \cdot \frac{1}{100}} \cdot \sqrt{P_a}$

Der Praktiker: Ich stelle die 52 der Skala B unter das Ende der Skala A, dann stelle ich den Mittelstrich des Schiebers nacheinander auf 1, 2, 3 usw. der Skala B und lese auf der Skala D die Wurzel des Produkts ab. Es ist also (abgerundet) bei

$P_a = 1$ Watt: $I_{a\,eff} = 13{,}9$ mA	$P_a = 4$ Watt: $I_{a\,eff} = 27{,}7$ mA
$P_a = 2$ Watt: $I_{a\,eff} = 19{,}6$ mA	$P_a = 5$ Watt: $I_{a\,eff} = 31{,}0$ mA
$P_a = 3$ Watt: $I_{a\,eff} = 24{,}0$ mA	$P_a = 6$ Watt: $I_{a\,eff} = 33{,}9$ mA

Bei $P_a = 50$ mW ist $I_{a\,eff} = \sqrt{\frac{0{,}05}{5200}} = 3{,}1$ mA; bei $P_a = 0{,}5$ W wäre $I_{a\,eff} = 9{,}6$ mA.

Wie ist es nun, wenn ich eine Zahl durch mehrere andere Zahlen teilen will, muß ich da jedesmal den Schieber neu einstellen, wie beim Dividieren gelernt? Da gibt es wohl keine Vereinfachung? Da ist ja dann eine Tabellenbildung sehr umständlich.

Der Ingenieur: Wenn man in der normalen Art rechnet, wie bisher bei Divisionsaufgaben, ja. Es gibt aber da einen Kunstgriff, der die Sache sehr vereinfacht und auch bei der Division eine einfache Tabellenbildung ermöglicht. Wir stecken einfach die Zunge so herein, daß die Ziffern auf dem Kopf stehen. Jetzt läuft die Skala C unter A und die Skala B über D. Es arbeiten aber nach wie vor A mit B und C mit D zusammen. Man dividiert genauso, wie man früher multiplizierte, stellt unter den Dividend auf der Skala A den Anfang oder das Ende der Skala B (oder über D den Anfang oder das Ende von C). Jetzt braucht man nur den Mittelstrich des Läufers auf den jeweiligen Divisor auf der Skala B (oder im zweiten Falle der Skala C) zu stellen und kann dann auf der Skala A (Skala D) das Ergebnis, den Quotienten, ablesen. Man muß nur auf eines achten: daß die Skala B jetzt nicht unter A, sondern über D läuft, und die Skala C unter A. **Bild 33** zeigt als Beispiel die Division der 12 (Skala A) durch 2, 3, 4, 5... (Skala B).

Hierfür ein weiteres Beispiel: Die Wellenlänge mehrerer Sender ist in Frequenzen umzuwandeln nach der Formel

$$f = \frac{3 \cdot 10^6}{\lambda}; \text{ f in Hz, } \lambda \text{ in m, oder } f = \frac{3 \cdot 10^3}{\lambda}; \text{ f in kHz, } \lambda \text{ in m.}$$

Man stellt den Anfang der Skala B (befindet sich jetzt rechts!) unter 3 oder 30 der Skala A, stellt den Läufer auf die Wellenlänge (Skala B) ein und kann jeweils unter dem Läuferstrich auf der Skala A die entsprechende Frequenz ablesen. Ebenso kann man es auch mit den Skalen D und C handhaben.

Der Praktiker: Schwierig erscheint es mir stets, bei der Umwandlung von Wellenlänge und Frequenz die richtige Stellenzahl zu treffen.

Der Ingenieur: Ich empfehle Ihnen, sich folgende kleine Tabelle abzuschreiben, so daß Sie sie jederzeit zur Hand haben:

m (kHz)	= kHz (m)
3 000 000 ...300 000	0,1... 1
300 000 ... 30 000	1 ... 10
30 000 ... 3 000	10 ... 100
3 000 ... 300	100 ... 1 000
300 ... 30	1 000 ... 10 000
30 ... 3	10 000 ... 100 000
3 ... 0,3	100 000 ... 1 000 000
0,3... 0,03	1 000 000 ...10 000 000

Sie können mit einem Blick hieraus ersehen, daß z. B. 500 m ≈ 600 kHz sein müssen und nicht etwa 60 kHz oder 6 000 kHz, oder daß λ = 20 cm entsprechend f = 1 500 000 kHz = 1 500 MHz sind. Auch daß f = 0,03 kHz = 30 Hz ≈ 10 000 000 m = 10 000 km ist, daß also vier Wellen einer 30-Hz-Frequenz bereits die Erde am Äquator umspannen können.

Nun verwandeln Sie bitte an Hand der Tabelle und mit Hilfe des Rechenschiebers die Wellenlängen λ = 58,7 m, 768 m, 2300 m, 7,25 m und 14,9 cm in Frequenzen!

Der Praktiker: Ich schiebe die Zunge umgekehrt herum hinein, so daß die 1 der Skala B unter die 30 der Skala A kommt. Es sind 58,7 m = 5111 kHz, 768 m = 390 kHz, 2300 m = 130,4 kHz, 7,25 m = 41 400 kHz, 14,9 cm = 0,149 m = 2 010 000 kHz = 2010 MHz.

Der Ingenieur: Bei manchen Rechenschiebern können Sie sich das Umdrehen der Zunge ersparen, da diese eine „Reziprokskala" auf der Zunge haben. Hierbei verläuft die reziproke Skala so, als ob die Zunge herumgedreht wäre, nur daß die Ziffern nicht auf dem Kopf stehen. Die reziproke Skala arbeitet, da sie nicht von 1...100, sondern von 1...10 unterteilt ist, mit der Skala D zusammen. Was „reziprok" bedeutet, wissen Sie doch wohl noch? Wir hatten diesen Begriff bereits in der 5. Stunde kennengelernt.

Der Praktiker: Reziprok ist der Kehrwert, $a = \frac{1}{b}$. D ist z. B. der Reziprokwert von μ, die Leitfähigkeit reziprok zum Widerstand usw. Es ist $D = \frac{1}{\mu}$.

Der Ingenieur: Die Umrechnung von μ in D ist bei der Reziprokskala besonders einfach. Wenn man den Wert von μ auf der Reziprokskala R aufsucht, so findet man darunter auf der Skala C den Wert von D. μ = 8 entspricht also D = 0,125 = 12,5 %, μ = 4 entspricht D = 0,25 = 25 % (siehe **Bild 34**).

Man kann mit umgedrehter Zunge auch multiplizieren. Auch hierbei arbeiten die Skalen A und B sowie C und D zusammen. Man stellt die Faktoren übereinander und liest dann über dem Anfang oder Ende der Skalen B – C auf der festen Skala, von der man ausgegangen ist, das Produkt ab.

Will man die drei Faktoren $a \cdot b \cdot c$ miteinander multiplizieren, so kann man das bei Vorhandensein einer Reziprokskala R meist mit einer Zungenstellung machen. Man stellt den Faktor a auf der Skala R und den Faktor b auf der Skala D übereinander, stellt den Läufer auf den Faktor c der Skala C ein und liest darunter auf der Skala D das Produkt ab. Rechnen Sie z. B. $6{,}05 \cdot 3{,}24 \cdot 2{,}22$ sowie $6{,}05 \cdot 3{,}24 : 7{,}15$ aus!

Der Praktiker: Zunächst 6,05 (auf R) über 3,24 (auf D), dann den Läufer über 2,22 (auf C) ergibt auf D = 43,5. Weiter: 6,05 über 3,24, dann 7,15 auf C; das geht ja gar nicht; es ist außerhalb des festen Teils.

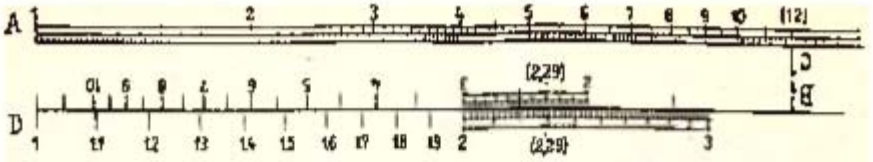


Bild 33. Tabellenbildung: 12 : 2, 3, 4, 5...; $\sqrt[3]{12} = 2{,}29$

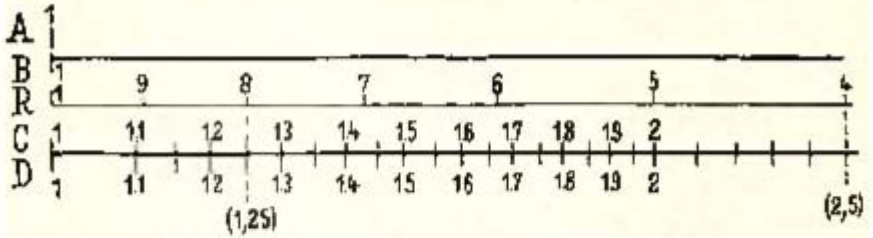


Bild 34. Arbeiten mit der Reziprokskala: 1 : 8 = 0,125; 1 : 4 = 0,25

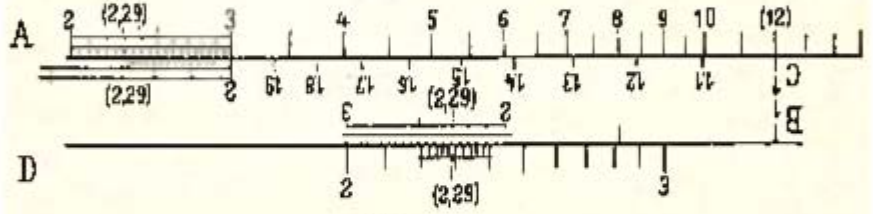


Bild 35. $\sqrt[3]{12} = 2{,}29$; $2{,}29^3 = 12$

Der Ingenieur: In einem solchen Falle bringt man den Läufer auf den Anfang der Zunge und schiebt dann das Ende der Zunge unter den Läufer. Jetzt hat man 7,15 im Bereich des festen Teils des Rechenschiebers.

Der Praktiker: Dann kommt 140,2 heraus. Ich finde hierbei aber keine Vereinfachung!

Der Ingenieur: Eine Vereinfachung tritt bei der Multiplikation mit der Skala R nur in den Fällen ein, in denen man drei Faktoren mit einer einzigen Zungenstellung ausrechnen kann.

Mit Hilfe der umgedrehten Zunge kann man bei Rechenschiebern, die keine Skala K haben, auch Kubikwurzeln ziehen. Man stellt unter die Zahl (z. B. 12) auf der Skala A die 1 der Skala B (bei umgedrehter Zunge) und paßt auf, welche Zahlen der Skala B und D sich decken (siehe Bild 35). Es ist zu beachten, daß bei umgedrehter Zunge die Skalen B und D übereinanderlaufen! In unserem Falle erfolgt die

Deckung bei 2,29; es ist also $\sqrt[3]{12} = 2.29$. Auch bei den beiden Skalen A und C decken sich 2,29. Es ist also gleichgültig, ob man auf B und D oder auf A und C abliest, die Hauptsache ist, daß man von der Skala A ausgeht. Stellt man den Anfang von C unter 1,2 der Skala A, so liest man 1,061 ab. Es ist also $\sqrt[3]{1,2} = 1,061$. Und stellt man das Ende von C unter 1,2, so decken sich 4,93 auf A und C. Damit hat man $\sqrt[3]{120} = 4,93$. Man kann also $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{10a}$ und $\sqrt[3]{100a}$ ablesen, genauso, als ob man eine K-Skala hat. Die Kubikzahl a^3 findet man, indem man umgekehrt vorgeht. Man bringt bei umgekehrter Zunge die betreffende Zahl auf der Skala B und D (bzw. A und C) zur Deckung; über B 1 oder B 100 steht dann die Kubikzahl.

Der Praktiker: Wenn man auf diese Art die Kubikzahl und die Kubikwurzel mit Rechenschiebern ohne die Teilung K finden kann, kann man da vielleicht auch $U^{2/3}$ und $U^{3/2}$ auf eine ähnliche Art finden?

Der Ingenieur: Das ist sehr einfach. Erinnern wir uns, daß $U^{3/2} = \sqrt{U^3}$ ist. Wir brauchen also nur U^3 nach dieser Methode auf den Skalen A und C auszurechnen und dann das Resultat am Anfang oder Ende der Skala C nicht auf der Skala A, sondern auf der Skala D abzulesen. Dann haben wir die Wurzel aus U^3 gezogen. Also eine sehr einfache Sache. Und $U^{2/3}$ ist auch nicht schwieriger. Es ist der umgekehrte Vorgang. Wir stellen über die gegebene Zahl auf D den Anfang oder das Ende der Skalen B–C. Die Zahl der Skalen A und C oder B und D, die sich decken, ist die gesuchte Zahl $\sqrt[3]{U^2} = U^{2/3}$. Rechnen Sie z. B. aus: $14,5^{2/3}$ und $\pi^{2/3}$!

Der Praktiker: Ich stelle 14,5 von A und 14,5 von C untereinander und lese dann auf D am Anfang der Skala B–C 5,52 ab (siehe Bild 36). Eine einfache Überlegung sagt mir, daß es 55,2 sein muß, denn $U^{2/3}$ ist immer größer als U.

Und $\pi^{2/3}$? Ich stelle über π auf D den Anfang der Skala B. Es decken sich auf B–D bzw. A–C die Zahlen 2,145 (siehe Bild 37). Da $U^{2/3}$ immer kleiner als U ist, muß $\pi^{2/3} = 2,145$ sein. Das ist ja eine einfache Angelegenheit!

Der Ingenieur: Das ist richtig überlegt und gerechnet. Man kann mit Hilfe der umgekehrten Zunge aber noch weitere Potenzen ausrechnen! Bringt man bei umgekehrter Zunge die Zahl a auf der Skala C und D zur Deckung, so liest man über C 1 oder C 10 a^4 ab. Z. B. $5^4 = 625$ (siehe Bild 38), und umgekehrt findet man $\sqrt[4]{a}$, indem man bei umgekehrter Zunge unter 625 ($= 6,25 \cdot 10^2$) stellt und mit dem Läufer die Zahl sucht, welche auf der Skala C und D zur Deckung kommt (siehe Bild 38): $\sqrt[4]{625} = 5$. Hat man einen Rechenschieber mit einer K-Skala und stellt nicht auf Skala A, sondern auf Skala K ein, so erhält man a^4 bzw. $\sqrt[4]{a}$ als Resultat, in unserem Falle $5^4 =$

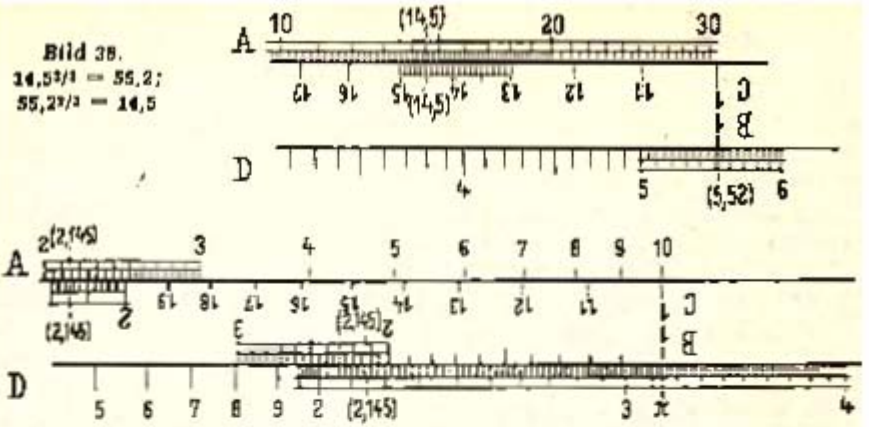


Bild 37. $\pi^{3/4} = 2{,}145$; $2{,}145^{3/4} = 3{,}14 = \pi$

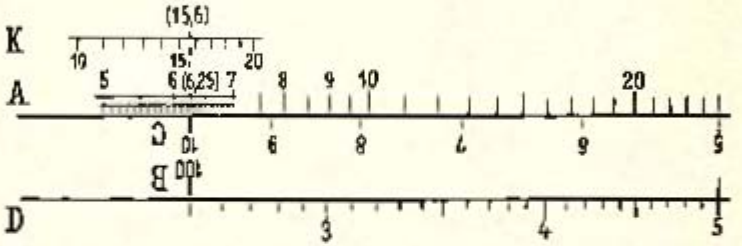


Bild 38. $5^4 = 625$; $\sqrt[4]{625} = 5$; $5^6 = 15\,600$; $\sqrt[6]{15\,600} = 5$

ca. 15 600 ($15{,}6 \cdot 10^3$); $\sqrt[5]{15\,600}$ = ca. 5. Genau macht es 15 625; das kann man aber nicht ablesen; man sieht nur, daß es etwas über 15,6 (× 1 000) ist.

Der Praktiker: Das ist fabelhaft! Das sind ja immer neue Seiten des Rechenschiebers! Bei einiger Überlegung ist es verständlich, daß man a^4 und $\sqrt[4]{a}$ ausrechnen kann. Wir hatten gesehen, daß man mit umgedrehter Zunge auf den Skalen C und D multiplizieren und damit auch $a \cdot a = a^2$ finden kann. Und da auf der Skala A immer das Quadrat von den Werten der Skala D steht, hat man damit das Quadrat von a^2: $a^2 \times a^2 = a^4$. Wie man aber auf der Skala K den Wert a^3 findet, ist mir nicht ganz erklärlich. Auf K steht doch die Kubikzahl von D. Es müßte dann doch $a^3 \times a^3 = a^6$ sein!

Der Ingenieur: Das ist ein Trugschluß! Da man bei umgekehrter Zunge auf D das Quadrat von A findet, und auf K die Kubikzahl von D, hat man damit nicht $a^2 \times a^3$, sondern $(a^2)^3 = a^6$!

Der Praktiker: Sie haben recht, ich war auf dem Holzwege.

Der Ingenieur: Beim Arbeiten mit umgedrehter Zunge kann man aber noch weitere Vereinfachungen treffen. Man kann die Divisionsaufgabe mit einer Multiplikation und mit einer Radizierung oder einer Potenzierung verbinden, ohne die Zunge nochmals zu verstellen. Führen Sie die Division in der soeben behandelten Art mit umgedrehter Zunge durch, stellen aber nicht die 1 der Skala B unter den Dividend, sondern irgendeine andere Zahl, so haben Sie den Bruch (eine Divisionsaufgabe ist ja zu gleicher Zeit ein aufgelöster Bruch) dadurch mit dieser Zahl multipliziert. Und lesen Sie das Ergebnis nicht auf der zugehörigen festen Skala, also nicht auf der Ausgangsskala ab, sondern auf der anderen festen Skala, so haben Sie zur gleichen Zeit die Wurzel gezogen bzw. das Ergebnis potenziert, je nachdem mit welchen Skalen Sie gearbeitet haben. Hat man z. B. die Aufgabe: $\sqrt{2{,}3 \cdot \frac{53}{27}}$, so stellt man bei umgekehrter Zunge die 2,3 der Skala B unter die 53 der Skala A und liest unter der 27 (Skala B) auf der Skala D gleich das Ergebnis ab:

$$\sqrt{2{,}3 \cdot \frac{53}{27}} = 2{,}12.$$

Der Praktiker: Das ist ja eine ungeheure Vereinfachung. Derartige Tips muß man sich merken. Ich sehe, daß man mit dem Rechenschieber doch sehr vieles vereinfachen kann, wenn man ihn vernunftgemäß und nicht schematisch anwendet.

Der Ingenieur: Will man keine Wurzel ziehen, sondern eine Potenz ausrechnen, so arbeitet man mit den Skalen D und C und liest das Ergebnis auf der Skala A ab.

19. Stunde:
Der Rechenschieber VIII

Der Pythagoreische Lehrsatz – Komplexer Widerstand $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ – Besondere Marken: π, M, c und c_1 – Berechnung von Kreisinhalt, Querschnitt, Oberfläche einer Kugel, Kugelvolumen, Zylindervolumen, Kegelvolumen – Besondere Skalen und Teilungen – Varianten des Rechenschiebers – Üben, üben und nochmals üben!

Der Ingenieur: Kennen Sie noch den Pythagoreischen Lehrsatz?

Der Praktiker: Der Pythagoreische Lehrsatz bezog sich doch wohl auf das Verhältnis der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks oder vielmehr auf das Verhältnis der über ihnen errichteten Quadrate zueinander.

Der Ingenieur: Das stimmt. Die Seite, die dem rechten Winkel gegenübersteht, also die längste Seite des rechtwinkligen Dreiecks, nennt man Hypotenuse, die dem rechten Winkel anliegenden Seiten

Katheten. Der Pythagoreische Lehrsatz lautet nun: Das Hypotenusenquadrat ist gleich der Summe der Kathetenquadrate, oder als Formel ausgedrückt: $c^2 = a^2 + b^2$. Zieht man hieraus die Wurzel, so ergibt sich $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Man nennt dies auch eine geometrische Addition, im Gegensatz zur arithmetischen Addition: $c = a + b$. Kommt Ihnen die Formel $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ nicht bekannt vor?

Der Praktiker: Dieser Formel begegnet man in der Elektrotechnik ja auf Schritt und Tritt! So ist der Wechselstromwiderstand (Scheinwiderstand) allgemein: $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, wobei R der reelle Teil (ohmscher Widerstand) und X der imaginäre Teil, der Blindwiderstand, ist. Bei einer Spule ist entsprechend $Z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}$, bei einem Kondensator $Z = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$, bei der Reihenschaltung eines Kondensators und einer Spule ist $Z = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$.

Der Ingenieur: Einen solchen Widerstand, welcher aus einem reellen Teil und einem imaginären Teil geometrisch zusammengesetzt ist, nennt man auch „komplexen" Widerstand. Auch den komplexen Widerstand kann man mit einem Rechenschieber berechnen. Warum und wieso, braucht uns zunächst nicht zu interessieren. Es genügt zu wissen, daß es geht. Also ein weiterer Rechenschiebertip, der noch ziemlich unbekannt ist.

Nehmen wir einmal an, es sei der Widerstand eines Saugkreises aus einer Spule mit $L = 0{,}25$ mH und $r = 27{,}5\ \Omega$ und einem Kondensator von 281 pF bei $f = 620$ kHz zu berechnen.
Es ist $\omega L = 6{,}28 \cdot 620 \cdot 10^3 \cdot 0{,}25 \cdot 10^{-3} = 6{,}28 \cdot 155 = 973{,}4\ \Omega$; es ist $\frac{1}{\omega C} = \frac{10^{12}}{6{,}28 \cdot 620 \cdot 10^3 \cdot 281} = \frac{10^6}{1094} = 914$; $973{,}4 - 914 \approx 60\ \Omega$. Bei $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ wird bekanntlich der kleinere Wert vom größeren abgezogen. Ist das Vorzeichen der Differenz positiv, so ist ihr Charakter induktiv, ist das Vorzeichen negativ, so ist der Charakter kapazitiv. Im übrigen ist bei der weiteren Rechnung das Vorzeichen stets positiv. Es ergibt sich also $Z = \sqrt{27{,}5^2 + 60^2} = \sqrt{(2{,}75^2 + 6^2) \cdot 10^2}$. Das kann man nun mit dem Rechenschieber ausrechnen. Man stellt die mittlere 10 der Skala B über die größere Zahl, hier also über die 6, auf der Skala D ein und rückt den Läuferstrich auf die kleinere Zahl, also 2,75, auf der Skala D. Hierüber liest man auf der Skala B den Wert 2,1. Hierzu zählt man 10 hinzu, stellt den Läufer auf diese Zahl 12,1 auf der Skala B, und liest jetzt auf der Skala D das Ergebnis ab: $Z = 6{,}6 \cdot 10 = 66\ \Omega$ (siehe Bild 39). Rechnen Sie einmal auf die normale Art nach, ob es stimmt!

Der Praktiker: Es ist $27{,}5^2 = 756$, $60^2 = 3600$; $3600 + 756 = 4356$; $\sqrt{4356} = 66\ \Omega$. Es stimmt also genau. Ich finde aber, daß die normale Art ebenso schnell geht!

Der Ingenieur: In diesem Falle ja, weil 60^2 einfach zu rechnen ist. Haben Sie aber nicht so glatte Zahlen, geht's schon schwieriger. Und dann gebrauchen Sie dazu stets Bleistift und Papier, um zu addieren. Mit dem Rechenschieber aber ersparen Sie sich die Addition, und Sie brauchen sich nicht um die Zwischenwerte zu kümmern. Ein paar Schieberstellungen – und das Ergebnis liegt vor.

Der Praktiker: Kann man den Wechselstromwiderstand nicht auch noch anders berechnen?

Der Ingenieur: Gewiß, man kann ihn vektoriell berechnen. Hierfür kann man mit vollem Recht „geometrische Addition" sagen, denn man gebraucht hierzu Zirkel und Lineal. Was ein Vektor ist, wollen wir jetzt nicht besprechen, das würde zu weit führen. Man zieht einen waagerechten Strich und trägt auf ihm R (reeller Widerstand), in unserem Falle 27,5 mm, ab. Im Endpunkt errichtet man ein Lot, auf dem man den induktiven Widerstand ωL abträgt, in unserem Falle 974 mm. Vom oberen Punkt des Lotes trägt man rückwärts den kapazitiven Widerstand ab, in unserem Falle 914 mm. Der übrigbleibende Rest des Lotes, 60 mm, ist demnach $\omega L - \frac{1}{\omega C}$. Dieses Restlot und die Gerade von $R = r$ sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks. Verbindet man ihre freien Enden, so hat man die Hypotenuse, hier 66 mm, gelegt. Sie entspricht dem Wechselstromwiderstand $Z = 66\,\Omega$ (siehe Bild 40). Im Bild 40 sind ωL und $\frac{1}{\omega C}$ nicht der ganzen Länge nach aufgezeichnet, da die Zeichnung sonst zu lang werden würde; die anderen Werte aber sind maßstäblich gezeichnet.

Der Praktiker: Auf den Rechenstäben, auch auf dem Schulrechenstab, sind noch einige besondere Marken gekennzeichnet. Daß $\pi = 3{,}14$ ist, weiß ich ja. Was aber bedeutet die Marke M, was c, c_1, was ϱ' und was ϱ''? Und was bedeuten die Teilungen lg, cos, sin, sin/tg und tg?

Der Ingenieur: $\pi = 3{,}14$ ist Ihnen bekannt, wie Sie sagen. M ist der reziproke Wert von π, $M = \frac{100}{\pi} = 31{,}8$. Auf manchen Rechenschiebern ist auch noch der Wert $0{,}785 = \frac{\pi}{4}$ markiert.

Die Marke c entspricht $\sqrt{\frac{4}{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 1{,}128$ und dient zur Berechnung des Flächeninhalts eines Kreises. Den Kreisumfang kann man ja einfach durch Multiplikation des Durchmessers mit π erhalten: $U = d \cdot \pi$. Die Kreisfläche beträgt: $F = r^2 \cdot \pi$. Man kann dies auf dem Rechenschieber ausrechnen, bequemer aber ist es, diese Formel umzuformen in $F = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{d^2}{c^2}$. Man braucht nur den Durchmesser auf der Skala D aufzusuchen, die Marke c der Skala C dar-

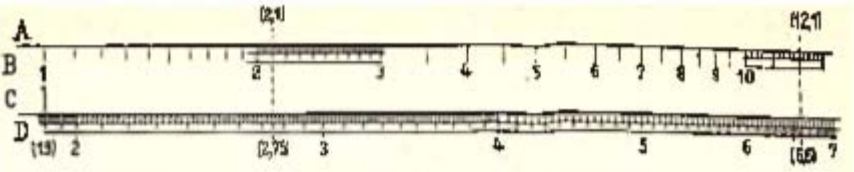
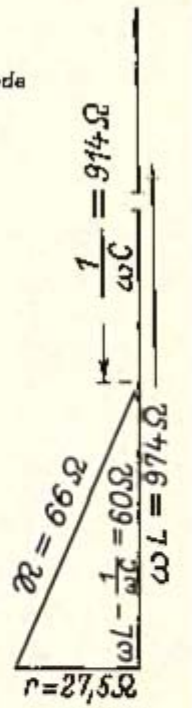


Bild 39. Das Berechnen eines komplexen Widerstandes mit dem Rechenschieber

Rechts: Bild 40. Dieselbe Rechnung nach der grafischen Methode



überzustellen, dann findet man über dem Anfang von B–C auf der Skala A die Kreisfläche. Und umgekehrt findet man bei gegebener Kreisfläche den Durchmesser, indem man B 1 unter den Wert der Kreisfläche auf A stellt. Dann steht der Durchmesser auf D unter c der Skala C. Auf diese Art kann man auch aus dem Drahtdurchmesser den Drahtquerschnitt berechnen und umgekehrt, denn der Drahtquerschnitt entspricht ja der Kreisfläche. Man kann aber auch den Querschnitt auf A einstellen und den Durchmesser auf der Skala C finden, indem man die Marke c der Skala C über D 1 stellt. Dann steht über jedem Durchmesser auf der Skala C der zugehörige Querschnitt auf der Skala A.

Außer der Marke c gibt es noch die Marke c_1. Es ist $c_1 = 2\sqrt{\frac{10}{\pi}} = \sqrt{\frac{40}{\pi}} = 3{,}568$; es ist $c_1^2 = 10\ c^2$. Die Marke c_1 wird genau so verwendet wie die Marke c; in manchen Fällen arbeitet es sich mit ihr bequemer.

Aus dem Querschnitt (= Kreisfläche) findet man den Inhalt eines Zylinders (Zylindervolumen $= \left(\frac{d}{c}\right)^2 \cdot h$), indem man den gefundenen Wert noch mit der Höhe h des Zylinders multipliziert. Hierzu braucht man keine neue Einstellung, sondern man sucht auf der Skala B die Höhe h auf und findet darüber auf A den Zylinderinhalt. Man kann bei derselben Einstellung auch gleich eine ganze Tabelle bilden, denn über jeder Höhe h auf B findet man ja den jeweiligen Inhalt.

Da ein Kegel den dritten Teil des Inhalts eines gleich großen Zylinders hat, braucht man nur den entsprechenden Zylinderinhalt

auszurechnen und durch 3 zu teilen. Besser ist es, die Division vorwegzunehmen. Zu diesem Zweck bestimmt man erst den Querschnitt (untere Kreisfläche) wie oben, hält diesen Quotienten mit dem Läufer fest und schiebt B 3 darunter. Dann steht auf der Skala B die Höhe des Kegels, und auf der Skala A darüber der Kegelinhalt, und man kann auch hier eine Tabelle des Kegelinhalts (Kegelvolumens) bei gleicher unterer Kreisfläche, aber verschiedener Höhe bilden, ohne noch eine weitere Einstellung vornehmen zu müssen.

Ähnlich kann man den Inhalt einer Kugel berechnen, denn das Kugelvolumen ist $V = \frac{4}{3}\,\pi r^3 = \frac{d^3\pi}{6} = \frac{d}{1{,}5} \cdot \left(\frac{d}{c}\right)^3$. Man geht genau wie beim Kegelvolumen vor, schiebt dann aber nicht B 3, sondern B 1,5 unter den Läufer.

Man kann auch gleich das Gewicht der Körper berechnen, indem man das ausgerechnete Volumen mit dem spezifischen Gewicht (mit der Wichte) des betreffenden Materials multipliziert.

Die Läufer der Rechenschieber haben meist eine Strichmarkierung. Manche Läufer haben aber drei Strichmarkierungen. Sie sind dann im Abstand 1,128 (der Skala C) voneinander entfernt, so daß man zum Ausrechnen des Kreisinhalts nicht mehr die Zunge zu benutzen braucht. Man stellt einfach den Mittelstrich des Läufers über den Durchmesser auf der Skala D. Unter dem linken Strich des Läufers liest man dann auf A den Flächeninhalt des Kreises ab. Dann gibt es noch Läufer, bei denen die drei Striche nicht gleichmäßig voneinander entfernt sind. Der Mittelstrich dient in Verbindung mit dem linken, mit W bezeichneten Strich zur Umrechnung von Watt in Pferdestärken und umgekehrt, und der rechte Strich in Verbindung mit dem Mittelstrich zum Ausrechnen des Kreisinhaltes bzw. Umrechnung von Durchmesser in Querschnitt usw. Für die Elektrotechnik ist es noch von Wert, wenn man sich in einer Entfernung von 19 mm vom rechten Strich eine Markierung auf dem Läufer macht. Dies entspricht der Entfernung 0,707...1 bzw. 1...1,414 und gestattet die Umwandlung des Effektivwertes in den Spitzenwert und umgekehrt auf den Skalen A oder B ohne weitere Rechnung.

Die Marken ϱ' und ϱ'' sowie die Skalen cos, sin, sin/tg und tg sind trigonometrische Teilungen und dienen zur Berechnung der Winkelfunktionen. Mit ihnen können wir uns vorerst noch nicht beschäftigen. Und die Skala lg dient zur Berechnung der Logarithmen. Hierauf werden wir bei gegebener Gelegenheit zurückkommen.

Der Praktiker: Mein Kollege zeigte mir kürzlich seinen neuen zweiseitigen Rechenschieber. Auf der einen Seite sind die bekannten Skalen A, B, C und D, auf der anderen Seite sind oben zwei Skalen CF und DF, die mit 3 anfangen und mit 3,5 (eine Größenordnung weiter) aufhören. Die 1 liegt dabei etwa in der Mitte der Skala. Dann ist noch eine dazu reziproke Skala CIF da. Alle drei Skalen sind etwas länger als die normalen Skalen C und D, die darunter auch noch einmal vorkommen. Was haben diese Skalen zu bedeuten?

Der Ingenieur: Mit dem Rechenschieber **(Bild 41)** kann man vorteilhaft multiplizieren, weil man nicht erst überlegen muß, ob man die Zunge nach rechts oder nach links zu verschieben hat. Wir waren auf das lästige Durchschieben in der 18. Stunde gestoßen. Hier sind nun die Skalen CF und DF gegen die Skalen C und D um den Wert $\pi = 3{,}14159$ versetzt, so daß auf den versetzten Skalen der Wert π über dem Anfang und Ende der Grundskalen liegt. Dabei zeigt die 1 oder 10 der Skala C denselben Wert der Skala D an, auf den die 1 der versetzten Skala CF auf der zugehörigen Skala DF eingestellt ist. Zu CF gehört noch die Reziprokskala CIF. Damit haben wir zwei Skalengruppen: oben DF, CF und CIF, die um π verschoben sind, und unten in normaler Lage CI, C und D. CI ist nur eine andere Bezeichnung für die Reziprokskala R.

Zum Multiplizieren sucht man am besten mit der 1 der verschobenen Skala CF den ersten Faktor der Aufgabe auf der Skala DF auf. Liegt der zweite Faktor auf CF jetzt wieder außerhalb der zugehörigen festen Skala, so liegt derselbe Wert, wenn man ihn auf der Skala C aufsucht, sicherlich innerhalb der anderen festen Skala D. Die beiden Skalengruppen arbeiten also derart zusammen, daß immer die Werte einer Zungenskala (C oder CF), die außerhalb der festen Skala liegen, bei der anderen Zungenskala (CF oder C) noch innerhalb zu liegen kommen.

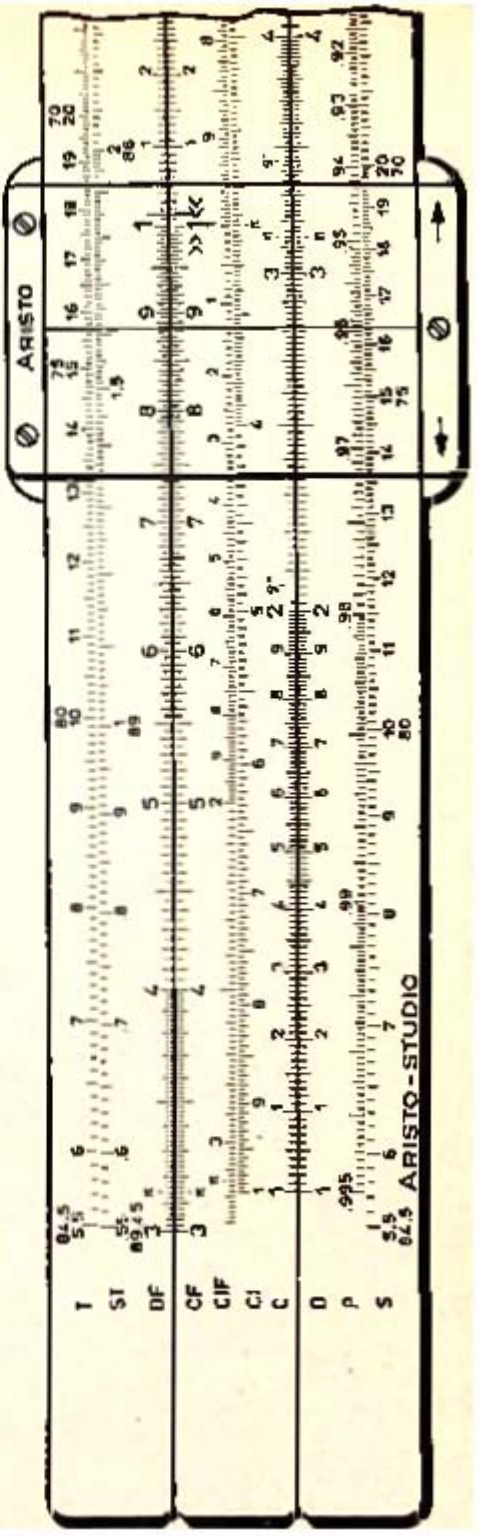


Bild 41. Rechenschieber mit versetzten Grundskalen (Ausschnitt aus dem Aristo-Studio)

Der Praktiker: Ich sehe schon: beim Beispiel aus der 16. Stunde 2,3 · 7,8 bringe ich die 1 der Skala CF unter die 2,3 von DF. Dann steht auch C 1 über D 2,3. Ich kann jetzt auf der Skala D das Ergebnis wieder nicht ablesen, aber ich finde es jetzt auf der Skala DF über dem Wert 7,8 der Skala CF: 2,3 · 7,8 = 17,94. Ich brauche die Zunge nicht erst zur anderen Seite durchzuschieben. Rechne ich umgekehrt 7,8 · 2,3, dann sehe ich gleich, daß ich die Zunge nach der anderen Seite verschieben muß, CF 1 unter 7,8 auf DF. Mit diesem Rechenschieber kann man ja besonders einfach Tabellen rechnen, die aus vielen Multiplikationen entstehen.

Der Ingenieur: Ja, das haben Sie richtig erkannt. Ebenso leicht rechnen Sie mit der Reziprokskala CIF Tabellen, bei denen viel dividiert wird, zum Beispiel die Frequenzen aus der 16. Stunde. Die versetzten Skalen haben aber noch einen weiteren Vorteil: der Läuferstrich zeigt für jeden Wert der Skala D bzw. C auf DF bzw. CF diesen Wert, multipliziert mit der Kreiszahl π an. Zwei Beispiele: zum Kreisdurchmesser d auf Skala D liest man auf DF direkt den Kreisumfang $U = d \cdot \pi$ ab. Ähnlich zeigt der Läuferstrich auf DF die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$, wenn auf D die doppelte Frequenz 2 f eingestellt wird. Beim Übergang von DF nach D bzw. von CF nach C wird in umgekehrter Richtung dagegen durch π dividiert. Die versetzten Skalen vereinfachen also alle Rechnungen, bei denen irgendwo als Faktor oder Teiler die Zahl π vorkommt.

Der Praktiker: Ich habe neulich einen Rechenschieber gesehen, bei dem war die Skala A nicht oben und D unten, sondern umgekehrt. Und die kleineren Doppelskalen zählten nicht von 1...100, sondern zweimal von 1...10. Gibt es denn da keine Einheitlichkeit?

Der Ingenieur: Im großen und ganzen haben die Rechenschieber die Teilungen, wie wir sie behandelt haben. Es gibt da nur wenige Außenseiter. Aber man kann nach kurzem Überlegen mit ihnen ebenso gut arbeiten wie mit den normalen Rechenstäben. Bei den kleinen Taschenrechenschiebern sind die Teilungen natürlich lange nicht so differenziert wie bei den normalen 25-cm-Stäben. Man kann nicht ganz so genau ablesen wie bei den normalen Stäben, kann den Taschenrechenschieber aber immer bei sich in der Tasche haben.

Für einzelne Berufe gibt es auch Spezial-Rechenschieber. Die bekanntesten sind der kaufmännische Rechenschieber Disponent, der Elektro-Rechenschieber und der Rechenstab System Darmstadt. Der letztere wurde vom Institut für Praktische Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt entwickelt und ist für den Elektrotechniker und Mathematiker als der vollkommenste anzusprechen. Für besondere Zwecke wurden noch weitere Spezialstäbe angefertigt, so Spezialstäbe für Kondensatorenberechnung, von Ing. H. G. Mende ein L/Hf-Rechner und ein R/N-Rechner u. a. m. Von letzteren abgesehen haben alle die gleichen Grundteilungen, die wir behandelt haben. Daneben gibt es aber noch Spezialteilungen. Über die Benutzung dieser Teilungen geben die jeweiligen Gebrauchsanweisungen

Auskunft. Diese Spezialrechenschieber jetzt zu behandeln, würde zu weit führen. Und wenn Ihnen dann später einmal ein solcher Rechenstab in die Hand kommt, haben Sie die Erklärung bestimmt wieder vergessen!

Mit dieser Betrachtung wollen wir das Kapitel des Rechenschiebers jetzt verlassen. Die Anwendung der Grundteilungen haben wir ja kennengelernt. Im übrigen werden wir bei passender Gelegenheit immer wieder auf den Rechenschieber zurückkommen. Die Nützlichkeit haben Sie wohl jetzt eingesehen, und die Scheu vor dem Rechenschieber haben Sie wohl auch verloren!

Der Praktiker: Ja, jetzt sehe ich ein, wie praktisch solch ein Rechenschieber ist, vor allem bei Tabellenbildung und bei zusammengesetzten Aufgaben.

Der Ingenieur: Die Fertigkeit beim Stabrechnen kommt nur durch ständigen Gebrauch. Deshalb immer und stets den Rechenschieber anwenden, wo es notwendig und wo es möglich ist. Wollen Sie eine Fertigkeit im Stabrechnen erreichen, so gibt es nur eines: üben, üben und nochmals üben!

20. Stunde:
Das Rechnen mit Logarithmen I

Logarithmen = die zweite Umkehrung des Potenzierens – Was sind Logarithmentafeln? – Multiplizieren mit Logarithmentafeln.

Der Ingenieur: Heute wollen wir uns einmal über Logarithmen und Logarithmentafeln unterhalten. Wissen Sie noch von der Schule her, was Logarithmen sind, und wie und was man mit Logarithmentafeln rechnen kann?

Der Praktiker: Ich weiß nur noch, daß wir als Logarithmentafeln ein richtiges Buch hatten. Die wenigsten wußten, was sie damit anfangen sollten.

Der Ingenieur: Für komplizierte Rechnungen ist das Arbeiten mit Logarithmentafeln unentbehrlich. Und es ist wirklich nicht schwer, wenn man sich über die Grundgedanken und Grundgesetze klar ist. Wie wir in der 6. Stunde gesehen hatten, nennt man bei einer Potenz die hochstehende Zahl Exponent. Also bei $5^4 = 625$ ist 5 die Grundzahl oder Basis, 4 die Hochzahl oder der Exponent, und 625 die Potenz. Eine erste Umkehrung des Potenzierens ist das Radizieren: $\sqrt[4]{625} = 5$. Hierbei ist der Exponent gegeben, und die Grundzahl wird gesucht: Welche Zahl gibt, hoch vier genommen, 625? Bei der Radizierung nennt man die Hochzahl (4) den Wurzelexponent, die unter dem Wurzelzeichen stehende Zahl (625) den Radikanden, und das Ergebnis (5) die Wurzel.

Es ist nun noch eine zweite Umkehrung möglich, wobei die Grundzahl (5) gegeben und die Hochzahl (4) gesucht wird. Die Frage lautet

hier: Welche Zahl muß ich hier als Exponent zur Basis 5 setzen, um 625 zu erhalten? In diesem Falle nennt man die Hochzahl Logarithmus, und die frühere Potenz (625) heißt Zahl oder Numerus; die Grundzahl (5) heißt auch hier Basis. Man schreibt diesen Vorgang folgendermaßen: $4 = {}^{5}\log 625$ oder $4 = \log 625$, (sprich: vier ist der Logarithmus von 625 zur Basis 5, oder der Fünferlogarithmus von 625).

In der 9. Stunde hatten wir gesehen, daß bei der Potenzrechnung aus der Multiplikation eine Addition der Exponenten wird, aus der Division eine Subtraktion der Exponenten, aus der Potenzierung eine Multiplikation der Exponenten, und aus der Radizierung eine Division der Exponenten. Beim Logarithmieren ist es ebenso, denn der Logarithmus entspricht ja dem Exponenten. Und hierin liegt der große Vorteil der Logarithmen. Will ich z. B. eine große, unbequeme Zahl mit einer anderen multiplizieren, so brauche ich nur von einer gemeinsamen Basis auszugehen, die Logarithmen der beiden Zahlen zu suchen, diese zu addieren, und dann aus dem resultierenden Logarithmus den Numerus zu bilden. Damit habe ich das Resultat der Multiplikationsaufgabe.

Der Praktiker: Na, ich finde nicht, daß das bequemer ist! Da muß man doch viel mehr rechnen, als wenn man gleich multipliziert hätte!

Der Ingenieur: Das hört sich nur so schlimm an. Die Logarithmen braucht man nämlich gar nicht auszurechnen, die liest man aus den Logarithmentafeln ab. Die einzige Rechenarbeit ist die einmalige Addition.

Man wendet nämlich einen Kniff an. Ich sagte schon, man müsse von einer gemeinsamen Basis ausgehen. Prinzipiell könnte man jede Zahl als Basis nehmen, theoretisch gibt es also eine Unzahl von Logarithmensystemen. In der Praxis aber geht man von der Zahl 10 aus; das hierauf beruhende System nennt man das dekadische oder das Briggsche Logarithmensystem. Man müßte hierfür eigentlich schreiben: ${}^{10}\log$, man hat hierfür aber die abgekürzte Form lg. lg ist also immer der Logarithmus zur Basis 10. Außerdem findet man manchmal die Bezeichnung ln. Das ist der sogenannte „natürliche Logarithmus" mit der Basis 2,718281828459...

Beim Briggsschen Logarithmensystem geht man von der Basis 10 aus. Es ist, da $10^1 = 10$ ist, ${}^{10}\log 10 = \lg 10 = 1$, und da $10^2 = 100$ ist, ${}^{10}\log = \lg 100 = 2$. Es ergeben sich also folgende ganzzahlige Logarithmen:

lg 1	= 0	$0{,}01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$;	lg 0,01 = −2
lg 10	= 1	lg 0,1	= −1
lg 100	= 2	lg 0,01	= −2
lg 1 000	= 3	lg 0,001	= −3
lg 10 000	= 4	lg 0,000 1	= −4
lg 100 000	= 5	lg 0,000 01	= −5
lg 1 000 000	= 6	lg 0,000 001	= −6 usw.

Die Logarithmen der Zahlen zwischen 10 und 100 liegen demnach zwischen 1 und 2, die der Zahlen zwischen 100 und 1000 zwischen 2 und 3 usw. Ganzzahlige Logarithmen kommen nur bei Zahlen vor, welche ganzzahlige Zehnerpotenzen sind, wie die oben aufgeführten; alle andern Briggsschen Logarithmen sind unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche, also irrationale Zahlen, von denen 4, 5, 6 oder mehr Stellen angegeben sein können. Der Logarithmus besteht demnach aus zwei Teilen, aus der Zahl vor dem Komma, der sogenannten Kennziffer, und aus der Zahl hinter dem Komma, der sogenannten Mantisse. In den Logarithmentafeln sind nur die Mantissen angegeben, die Zahl vor dem Komma, die Kennziffer, ergibt sich ja ohne Rechnung aus obiger Aufstellung. Man kann für die positive Kennziffer auch als Regel aufstellen: Die Kennziffer beträgt eine Einheit weniger, als die gegebene Zahl Stellen hat. 625 z. B. hat drei Stellen; die Kennziffer ist demnach 2. 56 567 hat 5 Stellen, die Kennziffer ist 4. Bei negativen Kennziffern ist die Frage noch schwieriger. Für einen Logarithmus z. B., welcher aus einer (immer positiven) Mantisse und einer negativen Kennziffer zusammengesetzt ist, führt man diese Division nicht aus, sondern schreibt die Kennziffer hinter die Mantisse, beispielsweise lg 0,02 = 0,3010 – 2. Hieraus kann man ersehen: Die negative Kennziffer ist immer gleich der Zahl der Nullen, welche vor den Ziffern des Numerus stehen, einschließlich der Null vor dem Komma.

In den Logarithmentafeln sind, wie gesagt, die Mantissen, also die Ziffern des Logarithmus hinter dem Komma, angegeben. Da die Logarithmen meist unendliche nichtperiodische Brüche sind, muß man die Zahl nach einer gewissen Länge abbrechen. Je größer die verlangte Genauigkeit ist, desto mehr Stellen wird die Mantisse haben müssen. Dementsprechend unterscheidet man vierstellige Logarithmentafeln für den allgemeinen Gebrauch, fünfstellige Tafeln bei höheren Anforderungen an die Genauigkeit, und sechs- und siebenstellige Tafeln für besondere Zwecke. Die sechsstellige Tafel wird aber selten verwendet. Für besondere Zwecke, z. B. für astronomische Berechnungen, hat man sogar neun-, zwölf- und sechzehnstellige Logarithmentafeln. Die sind aber sehr teuer; ihre Auflage ist nicht groß, da der Interessentenkreis klein ist. Die vierstelligen Tafeln gehen im allgemeinen von 0...999 bzw. von 100...999, die fünfstelligen Tafeln von 0...9999. Es gibt auch fünfstellige Tafeln, welche von 0...99999 gehen. Wenn auf eine Druckseite die Zahlen von 0...499 (bzw. 509) heraufgehen, so können Sie ja ausrechnen, wie stark die Logarithmentafeln sein müssen.

Der Praktiker: Eine vierstellige Logarithmentafel ist demnach auf 2 Seiten unterzubringen, eine fünfstellige der ersten Art umfaßt 20 Seiten, und eine der zweiten Art 200 Seiten, ist also schon ein Buch. Demnach hatten wir in der Schule eine fünfstellige Logarithmentafel der zweiten Art. Wie stark sind nun die weiter differenzierten Tafeln? Verzehnfacht sich da der Umfang auch immer?

Der Ingenieur: Verzehnfachen nicht, aber verdoppeln. 100 000 Zeilen werden im allgemeinen nicht überschritten. Da die Mantissen aber mehr Ziffern enthalten, bekommt man 10 Mantissen nicht mehr auf eine Seite hinauf und muß sie auf zwei Seiten nebeneinander verteilen.

Der Praktiker: Wie benutzt man nun eine Logarithmentafel?

Der Ingenieur: Auf den Seiten 94 und 95 finden Sie eine vierstellige Logarithmentafel abgedruckt. Die erste senkrechte Spalte, über der „Num" steht, enthält die ersten beiden Ziffern des Numerus, die oberste waagerechte Spalte die dritte Ziffer des Numerus. Im Kreuzungspunkt dieser beiden Ziffern steht die Mantisse. Bei einem vierstelligen Numerus kann man die vierte Stelle durch Interpolation (das wird am Beispiel erklärt) berücksichtigen. Für eine größere Numeruszahl muß man zur fünfstelligen Logarithmentabelle übergehen.

Als Beispiel für das Logarithmieren wollen wir zunächst einmal eine Multiplikations- und eine Divisionsaufgabe durchnehmen. Ist die Aufgabe $a \cdot b$, so wird hieraus $\lg (a \cdot b) = \lg a + \lg b$ gebildet; ist die Aufgabe $a : b$, so wird hieraus $\lg \left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$ gebildet.

Es seien die Aufgaben gestellt: a) 5667 · 228; b) 5667 : 228. Wir suchen in der Logarithmentafel die Mantisse zu 566(7) auf. Die ersten beiden Ziffern dieser Zahl (56) suchen wir in der linken Spalte, die dritte Ziffer (6) in der oberen horizontalen Spalte auf. Im Kreuzungspunkt finden wir die Mantisse 7528. Nun müssen wir noch die vierte Stelle, die 7, berücksichtigen. Für 567 ist die Mantisse 7536. Die Differenz zwischen beiden Mantissen beträgt also 8. Wenn wir jetzt $^{7}/_{10}$ dieser Differenz, also 5,6, zu 7528 zuschlagen, haben wir auch die vierte Stelle, die 7, berücksichtigt. Diesen Vorgang nennt man I n t e r p o l i e r e n .

Die Mantisse für 5667 beträgt also 7528 + 5,6 = 7533,6. Die Kennziffer ist bei einer vierstelligen Zahl 3, so daß der Logarithmus 3,75336 lautet. Bei 228 (links 22, oben 8) beträgt die Mantisse 3579, der Logarithmus 2,3579. Es ergibt sich $\begin{array}{r} 3{,}75336 \\ +\ 2{,}3579 \\ \hline 6{,}11126 \end{array}$. Der Logarithmus des Resultates enthält also die Kennziffer 6 (mithin eine siebenstellige Zahl) und die Mantisse 1112,6. Diese Mantisse suchen wir in der Logarithmentafel auf. Meist wird man den genauen Wert nicht finden. Wir finden 1106 und 1139 als nächste Mantissenzahlen. Bei 1106 finden wir links in der Num.-Spalte 12 und oben 9. Der Numerus ist also 129. Und für 1139 ist der Numerus 130. Die Differenz zwischen beiden Mantissen ist 33. Unsere Mantisse ist 6,6 von 1105 entfernt. Es verhält sich also $6{,}6 : x = 33 : 1$; $x = \frac{6{,}6}{33} = 0{,}2$. Mithin ist der Numerus 129,2. Da die Kennziffer 6 ist, ist das Resultat 1 292 000. Es ist also 5667 · 228 = 1 292 000. Eine genaue Nachrechnung würde 1 292 076 ergeben; mit der Genauigkeit können wir also durchaus zufrieden sein.

21. Stunde:
Das Rechnen mit Logarithmen II

Dividieren, Potenzieren und Radizieren mit Logarithmentafeln – Komplizierte Aufgaben – Vierstellige Logarithmentafeln – Logarithmen auf dem Rechenschieber.

Der Ingenieur: Rechnen Sie bitte einmal mit der Logarithmentafel aus, wieviel 5667 : 228 ist.

Der Praktiker: Aus der Division wird eine Subtraktion der Logarithmen. Es ist also $5667 : 228 = \lg 5667 - \lg 228 =$

$$\begin{array}{r} 3{,}75336 \\ -\ 2{,}3579 \\ \hline 1{,}39546 \end{array}$$

Die Mantisse des Quotienten ist also 39 546. In der Logarithmentafel finden wir die Mantissen 3945 für 248 und 3962 für 249. Die Interpolation ergibt $(3962 - 3945 = 17)$ $17 : 1 = 9{,}6 : x$; $x = \frac{9{,}6}{17} = 0{,}565$; es ergibt sich mithin der Numerus 248 565. Jetzt noch die Kennziffer 1 berücksichtigt: der Numerus muß zwei Stellen vor dem Komma haben, lautet also endgültig: 24,8565. Es ist also 5667 : 228 = 24,8565.

Der Ingenieur: Mit dem Rechenschieber würden Sie niemals diese Genauigkeit erzielen können.

Sind in einer Rechenaufgabe gemeine Brüche vorhanden, so muß man diese zuerst logarithmieren. Gemeine Brüche sind eigentlich ungelöste Divisionsaufgaben und werden dementsprechend behandelt.

Wieviel ist z. B. der Logarithmus von $3^3/_4$?

Der Praktiker: Es ist $\lg 3^3/_4 = \lg\left(\frac{15}{4}\right) = \lg 15 - \lg 4 =$

$$\begin{array}{r} 1{,}1761 \\ -\ 0{,}6021 \\ \hline \lg 3^3/_4 = 0{,}5740 \end{array}$$

Der Ingenieur: Nun sehen Sie einmal zur Kontrolle in der Logarithmentafel nach, welcher Numerus zur Mantisse 5740 gehört.

Der Praktiker: Zu 5740 gehört der Numerus 375. Da die Kennziffer 0 ist, kommt das Komma hinter die erste Ziffer, also 3,75. Aber das ist ja $3^3/_4$! Da habe ich zugleich den gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch verwandelt!

Der Ingenieur: Nun zum Potenzieren und Radizieren mittels der Logarithmentafel. Quadrate und Kubikzahlen bilden, Quadratwurzeln und Kubikwurzeln ziehen kann man ja mit dem Rechenschieber. Wenn aber Potenzen oder Wurzeln höherer Ordnung zu finden sind, so bieten die Logarithmentafeln die einzige Möglichkeit, dies auf einfache

Weise zu erledigen. Bei der Logarithmierung von Potenzen wird hieraus eine Multiplikation der Logarithmen, bei der Logarithmierung von Wurzeln wird hieraus eine Division der Logarithmen. Einige Beispiele erklären das am besten:

1. Wieviel ist $0{,}644^5$?

$$0{,}644^5 = x;\ \lg x = 5 \lg 0{,}644;\ \lg 0{,}644 = 0{,}8089 - 1$$

$$\begin{aligned} \lg x = 5 \lg 0{,}644 &= 5 \cdot 0{,}8089 - 1 \cdot 5 \\ &= 4{,}0445 - 5 \\ &= 0{,}0445 - 1 \end{aligned}$$

$$0{,}644^5 = x = 0{,}1108$$

2. Wieviel ist $\sqrt[13]{\left(24\frac{7}{9}\right)^5}$? Es ist $\sqrt[13]{\left(24\frac{7}{9}\right)^5} = \left(\frac{223}{9}\right)^{\frac{5}{13}} = x$;

$$\lg x = \frac{5}{13} \lg \left(\frac{223}{9}\right) = \frac{5}{13} (\lg 223 - \lg 9);$$

$$\begin{aligned} \lg 223 &= 2{,}3483 \\ -\lg\ 9 &= 0{,}9542 \\ &\overline{\quad\quad} \\ &1{,}3941 \cdot 5 \\ &= 6{,}9705 : 13 \end{aligned}$$

$$\lg x = \frac{5}{13} (\lg 223 - \lg 9) = 0{,}5362$$

$$\sqrt[13]{\left(24\frac{7}{9}\right)^5} = x = 3{,}437$$

Diese letzte Aufgabe war ja schon etwas schwieriger. Haben Sie da folgen können?

Der Praktiker: O ja, man muß nur immer Obacht geben, wann man eine Zahl als Mantisse und wann als Numerus aufsuchen muß.

Der Ingenieur: Zum Schluß noch eine größere Aufgabe, in der alle Rechnungsarten vorkommen:

$x = \dfrac{0{,}3584^2 \sqrt[3]{0{,}0423^2}}{9{,}8 \cdot 4{,}32}$. Um sich nicht zu verrechnen, ist vor allen Dingen eine saubere und übersichtliche Darstellung des Rechenvorganges notwendig.

In der logarithmierten Form lautet die Aufgabe:

$$\lg x = 2 \lg 0{,}3584 + \frac{2}{3} \lg 0{,}0423 - (\lg 9{,}8 + \lg 4{,}32).$$

$$2 \lg 0{,}3584 = \underline{(0{,}55438 - 1) \cdot 2}$$
$$= 1{,}10876 - 2$$
$$\frac{2}{3} \lg 0{,}0423 = \underline{(0{,}6263 - 2) \cdot 2 : 3}$$
$$= (1{,}2526 - 4) : 3 \quad +$$
$$= \underline{(0{,}2526 - 3) : 3}$$
$$= 0{,}0842 - 1$$

$$1{,}10876 - 2$$
$$+ \quad 0{,}0842 - 1$$
$$S_1: \quad 1{,}19296 - 3$$

$$\lg 9{,}8 = 0{,}9912 \quad +$$
$$\lg 4{,}32 = 0{,}6355 \quad -$$
$$S_2: \quad 1{,}6267$$

$$S_1 - S_2: = 1{,}19296 - 3 = 2{,}19296 - 4$$
$$- 1{,}6267 \quad - 1{,}6267$$
$$\lg x = 0{,}56626 - 4$$

Bei der Subtraktion muß immer eine positive Zahl herauskommen da eine Mantisse immer positiv ist. Da im vorliegenden Fall $S_2 > S_1$ ist, vergrößert man S_1, indem man die Kennziffer vorn um 1 erhöht und die Kennziffer hinten auch um 1 erhöht. Da es sich hinten um eine negative Kennziffer handelt, subtrahiert man von der Kennziffer hinten 1 und vorn addiert man 1 zu, so daß der Wert gleich bleibt. Aus 1,19296 — 3 wird 2,19296 — 4. Man erhält jetzt aber bei der Subtraktion $S_2 - S_1$ einen positiven Wert.

Es entspricht der Mantisse 5658 der Numerus 368,
der Mantisse 5670 der Numerus 369.

Interpoliert man, so ergibt sich 368,383. Nach Berücksichtigung der Kennziffer —4 erhält man $x = 0{,}000368383$.

Haben Sie folgen können?

Der Praktiker: Gewiß! Man muß zwar aufpassen, im Grunde genommen aber ist das Rechnen einfach. Nimmt man eine fünfstellige oder eine siebenstellige Logarithmentafel, so müßte das Resultat ja noch genauer sein.

Der Ingenieur: Allerdings. Bei der fünfstelligen Tafel z. B. erhält man bei der letzten Aufgabe als Resultat 0,00036835. Das kommt dadurch, daß man bei der vierstelligen Tafel die 5, und die folgenden Ziffern abrundet und die hierdurch entstehenden Ungenauigkeiten in das Resultat eingehen.

Der Praktiker: Man kann die Logarithmen doch auch mit dem Rechenschieber berechnen? Wie macht man das?

Tafel 1. Mantissen der gewöhnlichen

Num.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—∞	0000	3010	4771	6021	6990	7782	8451	9031	9542
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	2553	2788
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	4150	4314	4472	4624
3	4771	4914	5051	5185	5315	5441	5563	5682	5798	5911
4	6021	6128	6232	6335	6435	6532	6628	6721	6812	6902
5	6990	7076	7160	7243	7324	7404	7482	7559	7634	7709
6	7782	7853	7924	7993	8062	8129	8195	8261	8325	8388
7	8451	8513	8573	8633	8692	8751	8808	8865	8921	8976
8	9031	9085	9138	9191	9243	9294	9345	9395	9445	9494
9	9542	9590	9638	9685	9731	9777	9823	9868	9912	9956
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6929	6937	6946	6955	6964	6972	6981
Num.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(Briggsschen) Logarithmen

Num.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
Num.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Der Ingenieur: Auf den Rechenschiebern findet sich meist eine Skala, welche mit L oder lg bezeichnet ist. Sie hat im Gegensatz zu den Skalen A...D keine logarithmische, sondern eine lineare Einteilung, und zwar ist die ganze Länge der Skala von 1...10 linear unterteilt. Auf dem Schulrechenstab, der im Bild 8 gezeigt ist, sehen wir die Skala L unter der Skala D. Es steht unter dem betreffenden Wert der Skala D auf der Skala L gleich ohne weitere Umstellung die Mantisse des Logarithmus. Zum besseren Ablesen empfiehlt es sich, den Mittelstrich des Läufers über die Zahl zu schieben. Wollen wir z. B. den Logarithmus von 317 feststellen, so stellen wir den Mittelstrich des Läufers über 3,17 (Skala D) und lesen darunter auf der Skala L die Mantisse von ca. 5 ab (siehe Bild 8). Bei einer dreistelligen Zahl ist die Kennziffer 2, so daß der Logarithmus von 317 ca. 2,5 ist. Wenn wir zur Berechnung die Logarithmentafel heranziehen, so finden wir: lg 317 = 2,5011. Hier erkennen wir auch gleich den Unterschied zwischen der Berechnung der Logarithmen mittels Rechenschiebers und Logarithmentafel: Mit dem Rechenschieber findet man nur überschläglich den Logarithmus, zur genauen Berechnung muß man die Logarithmentafel zur Hilfe nehmen.

Nicht immer findet man die L-Skala unter der Skala D. Bei dem Rechenschieber z. B., den man im Bild 23 sieht, ist die Skala lg auf der Rückseite der Zunge, und zwar als mittlere Skala. Will man hier den Logarithmus von 317 feststellen, so zieht man die Zunge nach rechts heraus, bis C 1 über 3,17 der Skala D steht. Dreht man jetzt den Rechenstab herum, so findet man auf dem rechten Einschnitt einen schwarzen Strich, der auf ca. 5 der lg-Skala zeigt. Die Mantisse ist also ca. 5, und der Logarithmus damit ca. 2,5.

22. Stunde: Binomialrechnung

Potenzierte Binome – Der binomische Lehrsatz – Das Pascalsche Zahlendreieck – Binomialkoeffizienten – Kombinatorik, Permutation und Fakultät – Kombination und Variation – Das binomische Schema – Endliche Reihen.

Der Ingenieur: In der 9. Stunde hatten wir gelernt, daß eine Verbindung mehrerer Zahlen durch Plus- oder Minuszeichen Aggregat genannt wird. Und in der 10. Stunde hatten wir Binome kennengelernt. Mit ihnen wollen wir uns jetzt noch etwas näher beschäftigen. Wissen Sie noch, was Binome sind, und können Sie Beispiele und ihre Lösung sagen?

Der Praktiker: Binome sind Aggregate, welche aus zwei Gliedern bestehen. Potenzen solcher Binome sind z. B. die in der 9. Stunde behandelten wichtigen Formeln:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ und } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Der Ingenieur: Wir wollen gleich hierbei einen neuen Ausdruck kennenlernen. In dem mittleren Glied 2 ab nennt man die Ziffer 2 Faktor oder Koeffizient. Es gibt natürlich nicht nur ins Quadrat erhobene Binome, sondern auch höhere Potenzen von Binomen, wie $(a \pm b)^3$, $(a \pm b)^4$, $(a \pm b)^5$, $(a \pm b)^6$ usw.

Der Praktiker: Was hat das Zeichen $\pm$ denn für eine Bedeutung?

Der Ingenieur: Das heißt, daß es ein Binom $a + b$ und ein Binom $a - b$ geben kann.

Für die Potenzierung eines Binoms gilt der Binomische Lehrsatz. Hiernach hat das aufgelöste Binom stets ein Glied mehr als die Exponentenzahl, also bei $(a + b)^4$ hat es 5 Glieder. Jedes Glied besteht aus $a \cdot b$; bei a nimmt der Exponent von der durch die Potenz des Binoms gegebenen Höchstzahl um je eins ab bis a^0, bei b von b^0 an um je eins zu. Die Summe der Exponenten von $a \cdot b$ entspricht bei jedem Summanden stets dem Binomexponenten. Für positives b, also für $(a + b)$, sind alle Vorzeichen positiv; für negatives b, also für $(a - b)$, wechseln die Vorzeichen ab, und zwar haben die geraden Potenzen b^0, b^2, b^4 . . . ein Pluszeichen, die ungeraden b^1, b^3 . . . ein Minuszeichen.

Die Koeffizienten sind symmetrisch verteilt. Sie sind nach dem Pascalschen Zahlendreieck aufgebaut und können ihm entnommen werden (siehe nächste Seite).

Das Pascalsche Dreieck wird seitlich von lauter Zahlen 1 eingefaßt. Jede Zahl ist die Summe der beiden schräg darüberstehenden. Der Koeffizient ist, anders ausgedrückt, ein bis zur Exponentenziffer ansteigender Binomialkoeffizient, in unserm Falle also:

$$\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}.$$

Der Praktiker: Eine derartige Schreibweise kenne ich ja gar nicht! Was ist denn ein Binomialkoeffizient?

Der Ingenieur: Diese Frage habe ich erwartet. Der Binomialkoeffizient gibt an, wie oft bei einer bestimmten Zahl Gruppen gebildet werden können. Die untenstehende Zahl gibt die Gruppengröße oder Klasse an, die obenstehende Zahl nennt man Elementenzahl.

Der Praktiker: Wie spricht man denn z. B. $\binom{14}{4}$ aus?

Der Ingenieur: Man sagt 14 tief 4 oder 14 über 4. Bleiben wir gleich bei diesem Begriff. Er gibt Kunde, wieviel Vierergruppen oder Quaternen aus der Zahl 14 gebildet werden können. Einergruppen nennt man: Unionen, Zweiergruppen: Amben, Dreiergruppen: Ternen, Vierergruppen: Quaternen, Fünfergruppen: Quinternen, Sechsergruppen: Sexternen, Siebenergruppen: Septernen und Achtergruppen:

				1							$n = 0$
				1	1						$n = 1$
			1	2	1						$n = 2$
		1	3	3	1						$n = 3$
	1	4	6	4	1						$n = 4$
1	5	10	10	5	1						$n = 5$
1	6	15	20	15	6	1					$n = 6$
1	7	21	35	35	21	7	1				$n = 7$
1	8	28	56	70	56	28	8	1			$n = 8$
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		$n = 9$
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	$n = 10$

Die nach dem Pascalschen Zahlendreieck aufgebauten Koeffizienten.

Okternen. $\binom{14}{4}$ löst man auf, indem man die Gruppengröße steigend (von 1 angefangen um je eins steigend) multipliziert, bis die Gruppengröße erreicht ist, also $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$; die Elementenzahl multipliziert man ebensooft um eins fallend: $14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11$. Es ist also $\binom{14}{4} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{24024}{24} = 1001$. Das besagt, daß ich mit 14 Gegenständen 1001 verschiedene Vierergruppen bilden kann.

Der Praktiker: Das ist ja ganz unwahrscheinlich!

Der Ingenieur: Und doch ist es so. Nehmen Sie einmal an, Sie wollen wissen, wie oft Sie sechs verschiedene Widerstände in Gruppen zu zweien legen können, ohne daß dieselben Widerstände zweimal nebeneinander liegen. Es ergibt sich der Binomialkoeffizient $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$. Probieren Sie es in der Praxis, und Sie werden finden, daß es stimmt. Den Ausdruck $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ nennt man auch „Fakultät" von 4 und schreibt hierfür kurz 4! Die Fakultät gibt die Zahl der Gruppierungsmöglichkeiten an. 4! bedeutet also $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Man kann 4 Widerstände mit je 10 Ω, 50 Ω, 100 Ω und 500 Ω also 24mal umgruppieren, ehe man dieselbe Gruppierung wiederholen muß. Der Binomialkoeffizient ist gewissermaßen eine Einengung der Fakultät, da man hier nicht beliebige Gruppierungen bilden darf, sondern nur bestimmte Gruppen. $\binom{4}{2}$ z. B. bedeutet, daß man mit diesen vier Widerständen $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{12}{2} = 6$ Zweiergruppen (Amben) bilden kann.

Der Praktiker: Ich habe schon öfter in einer Formel hinter einer Ziffer ein Ausrufungszeichen gesehen und wußte nicht, was es be-

deutet. Das ist ja interessant, daß sich hinter dem Ausrufungszeichen eine ganze Rechenoperation verbirgt.

Der Ingenieur: Das Ausrufungszeichen ist gewissermaßen ein Befehl. Der Befehl nämlich, den Multiplikator von eins an schrittweise zu erhöhen, und als Multiplikand stets das vorhergehende Produkt zu nehmen. Und zwar so oft, wie die Fakultätszahl es bestimmt. Es ist also eine gewisse Ähnlichkeit mit der Potenz vorhanden. Bei der Potenzierung ist der Multiplikator aber feststehend, nämlich gleich der Grundzahl, und es wird nicht von eins angefangen, sondern von der Grundzahl. Genauso, wie man bei Potenzen zu ganz ungeheuerlichen Zahlen kommt, kommt man auch bei Fakultäten zu riesigen Zahlen. Es sind:

$1! = 1$	1
$2! = 1 \cdot 2 =$	2
$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 =$	6
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 =$	24
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 =$	120
$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 =$	720
$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 =$	5 040
$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 =$	40 320
$9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 =$	362 880
$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 =$	3 628 800
$11! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 =$	39 916 800
$12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 =$	ca. 479 000 000
$13! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 =$	ca. 6 227 000 000
$14! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 =$	ca. 87 178 300 000
$15! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 =$	ca. 1 307 674 366 000
$16! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 =$	ca. 20 922 790 000 000
$17! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 =$	ca. 356 000 000 000 000
$18! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 =$	ca. 6 400 000 000 000 000
$19! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 =$	ca. 120 100 000 000 000 000
$20! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 =$	ca. 2 402 000 000 000 000 000
$21! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 =$	über 50 000 000 000 000 000 000

21! ist also bereits über 50 Trillionen. Und 100!, die Fakultät von 100 also, ist eine Zahl, welche aus 158 Ziffern besteht! Doch nun zurück zu unserer Rechnung. Was $\binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$ ist, werden Sie ja jetzt ausrechnen können.

Der Praktiker: Es ist $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6, \binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4, \binom{4}{4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 1$. Was ist nun aber $\binom{4}{1}$ und $\binom{4}{0}$?

Der Ingenieur: $\binom{4}{1}$ ist gleich $\frac{4}{1} = 4$. Was $\binom{4}{0}$ ist, ist schwerer

zu begreifen. Da muß ich erst noch auf eine Eigenheit des Binomialkoeffizienten aufmerksam machen. Nehmen wir als Beispiel eine etwas größere Zahl. Bilden Sie einmal sämtliche Binomialkoeffizienten von 6.

Der Praktiker: $\binom{6}{0}$?, $\binom{6}{1} = \frac{6}{1} = 6$, $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$, $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$, $\binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$, $\binom{6}{5} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6$, $\binom{6}{6} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 1$.

Der Ingenieur: Sie sehen, es kommt immer dasselbe heraus, wenn die Gruppenzahl 1 oder $6-1$, wenn sie 2 oder $6-2$, wenn sie 3 oder $6-3$ ist usw. Es gibt also immer das gleiche Resultat bei der betr. Gruppenzahl und einer Gruppenzahl, welche der Elementenzahl minus Gruppenzahl entspricht, also bei $\binom{6}{1}$ und $\binom{6}{6-1} = \binom{6}{5}$, bei $\binom{6}{2}$ und $\binom{6}{6-2} = \binom{6}{4}$ usw. Infolgedessen ist auch $\binom{6}{0} = \binom{6}{6-0} = \binom{6}{6} = 1$. Und damit ist $\binom{6}{6} = \binom{6}{0} = \binom{4}{4} = \binom{4}{0} = \binom{3}{3} = \binom{3}{0}$ usw. $= 1$.

Wir entwerfen nun das Schema für unser Binom. $(a + b)^4$ hat $4 + 1 = 5$ Glieder.

Glied	I	II	III	IV	V
Koeffizient	$\binom{4}{0} = 1$	$\binom{4}{1} = 4$	$\binom{4}{2} = 6$	$\binom{4}{3} = 4$	$\binom{4}{4} = 1$
a = Exponent	a^4	a^3	a^2	a^1	a^0
b = Exponent	b^0	b^1	b^2	b^3	b^4
ergibt:	a^4	$+ 4a^3b$	$+ 6a^2b^2$	$+ 4ab^3$	$+ b^4$

Der Praktiker: Sie haben im Glied I doch b^0, und im Glied V haben Sie a^0. Wieso verschwinden denn diese Ausdrücke im Resultat?

Der Ingenieur: Bei Besprechung der Dezimalpotenzen wurde festgestellt, daß die nullte Potenz jeder Zahl gleich 1 ist; also ist auch $a^0 = 1$ und $b^0 = 1$. Im Glied I steht also $1 \cdot 1 \cdot a^4 = a^4$, und im Glied V steht $1 \cdot 1 \cdot b^4 = b^4$.

Der Praktiker: Die Potenzierung von Binomen ist mir jetzt klar. Weshalb aber haben Sie erst die Binome behandelt, und dann erst ihre Elemente, die Binomialkoeffizienten und die Fakultäten? Das heißt doch eigentlich das Pferd am Schwanze aufzäumen!

Der Ingenieur: Sie haben recht. Aber seien Sie ehrlich. Hätte ich zuerst die Fakultäten und die Binomialkoeffizienten behandelt, so hätten Sie bestimmt gesagt: Wozu dieses theoretische Zeug, was doch nicht in der Praxis vorkommt! Daß eine Formel $(a + b)^4$ in der Praxis vorkommen kann, glauben Sie mir aber. Und so habe ich denn aus der Praxis heraus die Theorie entwickelt.

Im Zusammenhang mit der Binomialrechnung hören Sie auch oft die Ausdrücke Kombinatorik und Permutation. Unter Kombinatorik versteht man das ganze Gebiet, mit allen Kombinationsmöglichkeiten zu jonglieren und zu arbeiten, die Kombinationskunst. Die Veränderung der Reihenfolge einer bestimmten Zahl von Elementen heißt Permutation, die Zahl ist die Fakultät. Die Permutation ist also ein Umstellen der Reihenfolge, ein Durcheinandermischen, wobei stets alle vorhandenen Elemente benutzt werden. Die Zusammenstellung zu verschiedenen Gruppen dagegen, wie beim Binomialkoeffizienten, ist eine Kombination im engeren Sinne. Die Variation ist eine permutierte Kombination; eine Kombination, welche mit einer Permutation gewissermaßen multipliziert wird. Multipliziert man z. B. bei einem aufgelösten Binomialkoeffizienten $\left(\text{z. B.} \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\right)$ die Elementenzahl mit der Gruppenzahl, so fällt damit die Gruppenzahl aus; und es bleibt nur die Elementenzahl übrig, in unserem Falle also 14 · 13 · 12 · 11. Diesen Vorgang nennt man Variation. Damit hätten wir das interessante Kapitel der Kombinatorik behandelt.

Der Praktiker: Ich habe einmal etwas gehört von Reihenbildung und Reihenentwicklung. Trifft diese Bezeichnung hier auch zu?

Der Ingenieur: Über Reihenbildung werden wir uns in der nächsten Stunde unterhalten. Dann werden wir auch diesen Fall untersuchen.

23. Stunde: Reihenbildung

Arithmetische Reihen und geometrische Reihen — Endliche Reihen und unendliche Reihen — Arithmetisches, harmonisches und geometrisches Mittel — Das Summenzeichen Σ — Die Dezibel-Reihe — Zinseszinsrechnung — Die Reihenentwicklung führt zur „höheren" Mathematik.

Der Praktiker: Sie wollten heute die Reihenentwicklung behandeln.

Der Ingenieur: Man unterscheidet zwei Arten von Reihen: arithmetische Reihen und geometrische Reihen. Betrachten Sie z. B. folgende Zahlenreihen:

a)	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19
b)	7,	14,	21,	28,	35,	42,	49
c)	42,	36,	30,	24,	18,	12,	6

Fällt Ihnen hierbei etwas auf?

Der Praktiker: Bei der Zahlenreihe a) ist die Differenz zwischen zwei Zahlen immer gleich 3, bei der Reihe b) gleich 7 und bei der Reihe c) gleich 6. Die Reihen a) und b) steigen um die jeweilige Differenz an, die Reihe c) dagegen fällt um die jeweilige Differenz.

Der Ingenieur: Zahlenreihen, in denen jede Zahl aus der ihr unmittelbar vorangehenden durch Addition oder Subtraktion der gleichen (Differenz-) Zahl gebildet wird, heißen arithmetische Reihen. Die Differenz je zweier aufeinanderfolgender Glieder ist also gleich. Für die Bildung der arithmetischen Reihen besteht folgende Grundform:

	a	b	c	d	e	f	g
	a	$a+\delta$	$a+2\delta$	$a+3\delta$	$a+4\delta$	$a+5\delta$	$a+6\delta$
z.B.	1	$1+3$	$1+2\cdot3$	$1+3\cdot3$	$1+4\cdot3$	$1+5\cdot3$	$1+6\cdot3$
=	1	4	7	10	13	16	19
δ =		3	3	3	3	3	

Mit dem Anfangsglied $a = 1$ und der konstanten Differenz $\delta = 3$ wäre also die arithmetische Zahlenreihe a) gebildet.

Betrachten Sie sich jetzt einmal die Zahlenreihe b). Fällt Ihnen daran etwas auf? Wie hoch ist bei ihr a und δ? Entwickeln Sie bitte diese Reihe!

Der Praktiker: Die Zahlenreihe b) ist ja das Einmaleins mit der Sieben! Es ist

	7	14	21	28	35	42	49
=	a	$a+\delta$	$a+2\delta$	$a+3\delta$	$a+4\delta$	$a+5\delta$	$a+6\delta$
=	7	$7+7$	$7+2\cdot7$	$7+3\cdot7$	$7+4\cdot7$	$7+5\cdot7$	$7+6\cdot7$
δ =		7	7	7	7	7	

Es ist also $a = 7$ und $\delta = 7$. Demnach enthält das Einmaleins die Glieder einer arithmetischen Zahlenreihe, bei der $a = \delta$ ist!

Der Ingenieur: Sehr richtig! Nun wollen wir uns die Zahlenreihe c) ansehen. Welche Gesetzmäßigkeit können Sie hierbei feststellen?

Der Praktiker: Das Anfangsglied ist offenbar $a = 42$.

Glied	a	b	c	d	e	f	g
	42	36	30	24	18	12	6
=	42	42—6	42—12	42—18	42—24	42—30	42—36
=	a	a—δ	a—2 δ	a—3 δ	a—4 δ	a—5 δ	a—6 δ
δ =		6	6	6	6	6	

Der Ingenieur: Die Reihen a) und b) kann man beliebig weit fortsetzen. Es sind dann unendliche Reihen. Geht die Reihe dagegen nur bis zu einer bestimmten Zahl, so hat man eine end-

liche Reihe vor sich. Ist die Anzahl der Glieder gleich n, so ist bei einer Addition der Glieder einer arithmetischen Reihe das Endziel $z = a + (n-1)\,\delta$; die Summe beträgt $s = \frac{n}{2}(a+z) = \frac{n\,(2a+(n-1)\,\delta)}{2}$. Hieraus ergibt sich: $\delta = \frac{z-a}{n-1}$; $n = \frac{2s}{a+z}$

In einer arithmetischen Reihe ist jedes Glied das arithmetische Mittel zwischen seinen Nachbargliedern. Es ist $b = \frac{a+c}{2}$. Die Summe zweier Glieder, welche gleich weit von den Enden abstehen, ist in jeder arithmetischen Reihe eine konstante Größe. Z. B. in Reihe a) ist 1 + 19 = 20, 4 + 16 = 20, 7 + 13 = 20 usw.

Außer dem arithmetischen Mittel gibt es noch ein harmonisches Mittel. Das harmonische Mittel zweier Zahlen a und c ist $\frac{2ac}{a+c}$. Die reziproken Werte je dreier Glieder einer arithmetischen Reihe bilden harmonische Zahlen; die mittlere Zahl ist das harmonische Mittel zwischen den Nachbarzahlen. Es ist demnach beispielsweise $\frac{1}{c} = \frac{2\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{d}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}$, in der Reihe a) also

$$\frac{1}{c} = \frac{2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{10}} = \frac{2\cdot\frac{1}{40}}{\frac{10+4}{40}} = \frac{2\cdot 40}{40\cdot 14} = \frac{1}{7}.$$

Bei den betrachteten Beispielen war die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder stets gleich. Es besteht nun aber auch die Möglichkeit, daß die Differenzen ungleich sind und erst die Differenzen dieser oder einer späteren Differenzreihe gleich werden. In einem solchen Falle spricht man von einer höheren arithmetischen Reihe. Beispiel:

	2		5		11		20		32		47		65		86
δ =		3		6		9		12		15		18		21	
δ_2 =			3		3		3		3		3		3		

oder auch

	3		8		18		29		53		98		178		311
δ =		5		8		13		24		45		80		133	
δ_2 =			3		5		11		21		35		53		
δ_3 =				2		6		10		14		18			
δ_4 =					4		4		4		4				

Nun wollen wir einmal sehen, ob auch der Binomialkoeffizient und die Variation als arithmetische Reihen zu betrachten sind.

Nehmen wir als Beispiel $\binom{14}{4} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. Was meinen Sie, ist das eine arithmetische Reihe?

Der Praktiker: Es ist

14	13	12	11	:	1	2	3	4
$= a$	$a-\delta$	$a-2\delta$	$a-3\delta$	:	a	$a+\delta$	$a+2\delta$	$a+3\delta$
$= 14$	$14-1$	$14-2 \cdot 1$	$14-3 \cdot 1$	:	1	$1+1$	$1+2 \cdot 1$	$1+3 \cdot 1$

Demnach ist der Binomialkoeffizient und damit auch die Variation eine endliche arithmetische Reihe.

Der Ingenieur: Ein Fehlschluß! Wie Sie aus den Regeln für die arithmetischen Reihen ersehen, werden die Glieder einer arithmetischen Reihe durch Addition miteinander verbunden. Beim Binomialkoeffizienten dagegen erfolgt die Verbindung der Glieder durch Multiplikation. Und damit können auch die Regeln der arithmetischen Reihen auf den Binomialkoeffizienten keine Anwendung finden. Binomialkoeffizienten sind also keine endlichen arithmischen Reihen!

Der Praktiker: Ich erinnere mich, daß arithmetische Proportionen durch Addition oder durch Subtraktion miteinander verbunden waren, geometrische Proportionen dagegen durch Multiplikationen oder Division. Demnach ist analog der Binomialkoeffizient wohl eine geometrische Reihe?

Der Ingenieur: Auch das nicht! Wenn Sie Widerstände in Reihe schalten, so addieren sich ihre Werte. Auch bei mathematischen Reihen werden die Glieder stets addiert oder subtrahiert, niemals aber multipliziert oder dividiert. Innerhalb der Glieder aber können Multiplikationen, Divisionen, Potenzen, Wurzeln, Fakultäten usw. vorkommen. Geometrische Reihen sind nun Reihen, in denen der Quotient je zweier aufeinanderfolgender Glieder gleich ist:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} = \sum_{\nu=1}^{n} aq^{\nu-1}.$$

Hierin ist q der Quotient und n die Zahl der Glieder.

Der Praktiker: Was bedeutet denn das Zeichen hinter dem Gleichheitsstrich?

Der Ingenieur: Σ ist der (große) griechische Buchstabe Sigma und kennzeichnet eine Summe, ν ist das (kleine) griechische Ny und kennzeichnet die Zahl der vorzunehmenden Operationen.

Der Praktiker: Wie spricht man das denn aus?

Der Ingenieur: Man sagt: Summe aq hoch Ny minus eins von Ny gleich eins bis Ny gleich n.

Für eine arithmetische Reihe kann man entsprechend schreiben:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a + (\nu - 1)\,\delta.$$

Das Endglied einer geometrischen Reihe ist stets $z = aq^{n-1}$, und die Summe ist $s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{qz - a}{q - 1}$.

Eine geometrische Reihe ist z. B.:

	2		6		18		54		162	486
	a		aq		aq^2		aq^3		aq^4	aq^5
δ =		4		12		36		108		324
q =		3 ×		3 ×		3 ×		3 ×		

Eine andere Reihe:

	3		5		11		29		83	245
	aq		2 + aq		$2 + aq^2$		$2 + aq^3$		$2 + aq^4$	$2 + aq^5$
δ =		2		6		18		54		162
q =		3 ×		3 ×		3 ×		3 ×		

Ist die geometrische Reihe eine fallende ($q < 1$) mit unendlicher Gliederzahl ($n \to \infty$ [unendliche geometrische Reihe]), so nähert sich das letzte Glied der Grenze Null, so daß man $z = 0$ setzen kann.

Es ist dann $s = \frac{a}{1 - q}$.

Insbesondere ist $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \cdots \frac{1}{2^n} + \ldots = 2$;

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots + (-1)\frac{1}{2^n} \pm \ldots = \frac{2}{3}.$$

Eine steigende unendliche Reihe ($q > 1$) ergibt für z und s den Wert ∞ und ist infolgedessen nicht berechenbar.

Aus den Formeln für z und s ergibt sich für eine geometrische Reihe: $a = \frac{s(q-1)}{q^n - 1}$, $n = \frac{\lg z - \lg a}{\lg q} + 1$.

Das geometrische Mittel ist: $b = \sqrt{a \cdot c}$. Bei der geometrischen Reihe ist jedes Glied das geometrische Mittel seiner Nachbarglieder.

Eine geometrische Reihe bildet beispielsweise die Übertragungseinheit dB (Dezibel). Dezibel ist ein Leistungsverhältnis; es ist

$1\ \text{dB} = \sqrt[10]{10} = 1{,}2589$;

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 dB
=	1,2589	$1{,}2589^2$	$1{,}2589^3$	$1{,}2589^4$	$1{,}2589^5$	$1{,}2589^6$	$1{,}2589^7$	$1{,}2589^8$	$1{,}2589^9$	$1{,}2589^{10}$
=	1,259	1,585	1,995	2,512	3,162	3,981	5,01	6,31	7,943	10
=	1 q	$1\,q^2$	$1\,q^3$	$1\,q^4$	$1\,q^5$	$1\,q^6$	$1\,q^7$	$1\,q^8$	$1\,q^9$	$1\,q^{10}$

Diese Reihe fängt mit aq, also dem 2. Glied, an. Das erste Glied ist $a = 1$; $q = 1{,}2589$.

Was ist nun $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \ldots + n^2$: eine geometrische oder eine arithmetische Reihe?

Der Praktiker: Sicher eine geometrische Reihe, es kommen ja Potenzen darin vor!

Der Ingenieur: Rechnen Sie einmal diese Reihe bis 6^2 durch, dann werden Sie sehen, daß Sie falsch geraten haben!

Der Praktiker: Es ist

	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2
=	1	4	9	16	25	36
δ =	3	5	7	9	11	
δ_2 =	2	2	2	2		

Tatsächlich, es ist eine arithmetische Reihe!

Der Ingenieur: Sie sehen, nicht das Vorhandensein von Potenzen macht die geometrische Reihe, sondern die stetige Vergrößerung der Exponentenzahlen der Potenz ist die Voraussetzung einer geometrischen Reihe. In unserem letzten Beispiel aber bleibt die Exponentenzahl immer gleich, nur die Grundzahl vergrößert sich stetig. Als Summe kann man für obige Reihe auch schreiben:

$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$. Entsprechend ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2.$$

Der Praktiker: Wann kommen denn eigentlich arithmetische oder geometrische Reihen in der Praxis vor?

Der Ingenieur: Arithmetische Reihen haben nur eine geringe Bedeutung für das praktische Leben. Geometrische Reihen dagegen haben für die Zinseszinsrechnung, Amortisationsrechnung, Berechnung der Kapital- und Lebensversicherung, Rentenversicherung usw. große Bedeutung. Obgleich diese Rechenarten nichts mit der Funktechnik zu tun haben, will ich doch einige Worte zur Zinseszinsrechnung wegen ihrer Bedeutung für das tägliche Leben sagen. Man unterscheidet den Zinssatz p, also den eigentlichen Prozentsatz der Zinsen, und den Zinsfaktor q, d. h. die Größe, zu der 1 DM in einem Jahre anwächst. Es ist $q = \frac{100 + p}{100}$. Analog den Bezeichnungen bei den geometrischen Reihen ist a das Anfangskapital, n die Zahl der Jahre, und K ist das Endkapitel. Es ist $K = aq^n$; $\lg K = \lg a + n \lg q$;

hieraus folgt: $a = \frac{K}{q^n}$, $\lg a = \lg K - n \lg q$; $q = \sqrt[n]{\frac{K}{a}}$,

$$\lg q = \frac{\lg K - \lg a}{n}, \quad n = \frac{\lg K - \lg a}{\lg q}.$$

Der Praktiker: Das ist ja alles ganz schön, aber wozu soll ich das alles wissen! Was interessiert mich die Berechnung einer Lebensver-

sicherung! Ich bin doch kein Versicherungsfachmann! Ich will doch vor allem funktechnische Formeln verstehen lernen!

Der Ingenieur: Die Reihenentwicklung führt schon zur höheren Mathematik, zur Differential- und zur Integralrechnung. Man kennt dort die Fouriersche Reihenentwicklung [1]), welche zur Analyse von Schwingungen und Klangverbindungen unentbehrlich ist, die Taylorsche und die MacLaurinsche Reihe usw. Auf diese Dinge können wir aber jetzt nicht weiter eingehen, sie sind zu schwierig. Ich wollte Ihnen nur zeigen, wie Reihen entwickelt werden, damit Sie sich unter Reihenbildung und Reihenentwicklung etwas vorstellen können.

24. Stunde:
Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten

Allgemeine Regeln – Vorsicht vor der Null – Bruchgleichungen – Einfache Wurzelgleichungen – Gleichungen mit mehr als zwei Quadratwurzeln – Gleichungen mit Haupt- und Nebenwurzeln.

Der Ingenieur: Heute wollen wir die Auflösung von Gleichungen behandeln. Wenn der Stoff auch zunächst etwas trocken erscheint, so werden Sie doch an Hand von praktischen Beispielen ersehen, daß man in der Praxis immer wieder vor die Notwendigkeit gestellt wird, solche Gleichungen aufzulösen.

Mit der einfachsten Form der Gleichung, der Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten, haben wir im Laufe des Unterrichts schon oft gearbeitet, ohne daß wir das besonders gesagt haben. Eine Gleichung lag z. B. schon vor, wenn wir in der ersten Stunde $a + b = x$ sagten. Das ist schon eine Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten. Es seien hierzu einige Grundregeln aufgezeigt:

1. Eine Gleichung bleibt erhalten, wenn man auf beiden Seiten denselben Wert addiert oder subtrahiert oder mit demselben Wert multipliziert, dividiert, potenziert oder radiziert.

2. Werden Glieder einer Gleichung von einer Seite auf die andere gebracht, so muß das Vorzeichen gewechselt werden.

3. Kommt die Unbekannte in mehreren Gliedern vor, so werden diese auf die linke Seite gebracht und zusammengefaßt. Klammern werden aufgelöst und nach zusammengehörenden Gliedern geordnet.

---

[1]) Siehe „Funktechnische Arbeitsblätter" Mth 31.

Berechnen Sie einmal: $(x + 3)(a - 2) = (2x + 2)(a - 2) + x(a - 2.)$

Der Praktiker: Ich kürze zunächst die einzelnen Glieder durch $(a - 2)$. Es ergibt sich dann: $x + 3 = 2x + 2 + x$;

$x - 2x - x = 2 - 3;\ -2x = -1;\ x = \frac{1}{2}$.

Der Ingenieur: Berechnen Sie nun aber $6(x - 5) = 2(x - 5)$.

Der Praktiker: Wenn man hier kürzt, so käme ja heraus: $6 = 2$. Das kann doch nicht stimmen! Was ist denn da verkehrt?

Der Ingenieur: Rechnen Sie einmal die Gleichung ungekürzt aus!

Der Praktiker: Es ist

$$\begin{aligned} 6(x - 5) &= 2(x - 5) \\ 6x - 30 &= 2x - 10 \\ 6x - 2x &= 30 - 10 \\ 4x &= 20 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Der Ingenieur: Wenn Sie jetzt $x = 5$ in die Gleichung einsetzen, so erhalten Sie

$$\begin{aligned} 6(5 - 5) &= 2(5 - 5) \\ 6 \cdot 0 &= 2 \cdot 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Sie sehen also, Sie dürfen in einem Falle, in dem sich ein Faktor 0 ergeben würde oder wenn eine Null versteckt ist, niemals kürzen. Außerdem dürfen Sie sowieso einen Faktor, der das zu berechnende x enthält, niemals kürzen, da Sie dann die Unbekannte x beseitigen würden.

Bei Bruchgleichungen müssen Sie zunächst die Brüche fortschaffen. Man sucht den Hauptnenner und multipliziert mit ihm die Gleichung, z. B. $\frac{19 - 3x}{2} - 3 + \frac{x - 15}{6} = \frac{3x + 16}{3} + \frac{44 + 3x}{4}$. Wie würden Sie das berechnen?

Der Praktiker: Der Hauptnenner ist offenbar 12. Es ist damit

$$\frac{12(19 - 3x)}{2} - 3 \cdot 12 + \frac{12(x - 15)}{6} = \frac{12(3x + 16)}{3} + \frac{12(44 + 3x)}{4}$$

$$6(19 - 3x) - 3 \cdot 12 + 2(x - 15) = 4(3x + 16) + 3(44 + 3x)$$

$$114 - 18x - 36 + 2x - 30 = 12x + 64 + 132 + 9x$$

$$114 - 36 - 30 - 64 - 132 = 18x + 12x + 9x - 2x$$

$$-148 = 37x$$

$$x = -4$$

Der Ingenieur: Wie würden Sie nun die Gleichung

$$\frac{1}{x - 7} - \frac{1}{x - 10} = \frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x - 1}$$ auflösen?

Der Praktiker: Ich glaube, daß man hier nach der in der 4. Stunde gebrachten Formel $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{a \cdot b}$ vorgehen müßte.

Dann ergibt sich:

$$\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-10} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{(x-10)-(x-7)}{(x-7)\,(x-10)} = \frac{(x-1)-(x+2)}{(x+2)\,(x-1)}$$

$$[(x+2)\,(x-1)] \cdot [x-10-x+7] = [(x-7)\,(x-10)] \cdot [x-1-x-2]$$

$$[(x+2)\,(x-1)] \cdot [-3] = [(x-7)\,(x-10)] \cdot [-3]$$

$$x^2 - x + 2x - 2 = x^2 - 10x - 7x + 70$$

$$18x = 72$$

$$x = 4$$

Der Ingenieur: Was würde $\frac{ax - a^2}{2b} = a - \frac{x-b}{2}$ ergeben?

Der Praktiker: Es ist, wenn $\frac{ax - a^2}{2b} = a - \frac{x-b}{2}$,

$$\frac{2b\,(ax - a^2)}{2b} = 2ab - \frac{2b\,(x-b)}{2}$$

$$ax - a^2 = 2ab - bx + b^2$$

$$ax + bx = a^2 + 2ab + b^2$$

$$x(a+b) = (a+b)^2$$

$$x = a + b$$

Der Ingenieur: Sehen Sie, man kann all die Formeln, welche wir in den ersten Stunden gelernt haben, in der Praxis immer wieder zur Lösung von Gleichungen verwenden.

Nun wollen wir die Lösung von Wurzelgleichungen versuchen, d. h. von Gleichungen, bei denen die Unbekannte im Radikanden ist. Steht vor der Wurzel noch ein Faktor, so dividiert man zunächst beide Seiten der Gleichung durch diese Zahl. Dann potenziert man beide Seiten mit dem Wurzelexponenten (bei einer Quadratwurzel quadriert man also) und löst weiterhin die Gleichung wie bisher. Enthält die Gleichung zwei Quadratwurzeln mit gleichem Radikand, so bringt man als erstes beide Wurzeln auf dieselbe Seite; haben die Wurzeln aber einen verschiedenen Radikand, auf jede Seite eine Wurzel. Versuchen Sie danach folgende Gleichungen zu lösen:

(1) $17 - 3\sqrt{\frac{x}{3} + 1} = 11$ (2) $3\sqrt{2x+5} + 5 = 4\sqrt{2x+5}$

(3) $4\sqrt{x+14} + \sqrt{x+25} = 6\sqrt{x+25} - 2\sqrt{x+14}$

Der Praktiker:

Zunächst Gleichung (1):

$$17 - 3\sqrt{\frac{x}{3} + 1} = 11$$

$$17 - 11 = 3\sqrt{\frac{x}{3} + 1}$$

$$2 = \sqrt{\frac{x}{3} + 1}$$

$$4 = \frac{x}{3} + 1$$

$$3 = \frac{x}{3}$$

$$9 = x$$

Dann Gleichung (2):

$$3\sqrt{2x + 5} + 5 = 4\sqrt{2x + 5}$$

$$5 = 4\sqrt{2x + 5} - 3\sqrt{2x + 5}$$

$$5 = \sqrt{2x + 5}$$

$$25 = 2x + 5$$

$$25 - 5 = 2x$$

$$10 = x$$

Zuletzt Gleichung (3):

$$4\sqrt{x + 14} + \sqrt{x + 25} = 6\sqrt{x + 25} - 2\sqrt{x + 14}$$

$$4\sqrt{x + 14} + 2\sqrt{x + 14} = 6\sqrt{x + 25} - \sqrt{x + 25}$$

$$6\sqrt{x + 14} = 5\sqrt{x + 25}$$

$$36(x + 14) = 25(x + 25)$$

$$36x + 504 = 25x + 625$$

$$11x = 121$$

$$x = 11$$

Das ist ja alles nicht so schwierig. Nur aufpassen muß man!

Der Ingenieur: Nun versuchen Sie einmal eine Gleichung mit mehr als zwei Quadratwurzeln zu lösen! Bei der Lösung erhalten Sie durch Quadrierung fast immer Gleichungen von der Form $(a + b)^2$ bzw. $(a - b)^2$, durch deren Lösung Sie weiterkommen. Ein Beispiel: $\sqrt{x - 2} - \sqrt{x - 7} = \sqrt{x + 14} - \sqrt{x + 5}$.

Der Praktiker: Wenn man $\sqrt{x - 2} - \sqrt{x - 7} = \sqrt{x + 14} - \sqrt{x + 5}$ quadriert, so erhält man

$$(\sqrt{x - 2} - \sqrt{x - 7})^2 = (\sqrt{x + 14} - \sqrt{x + 5})^2,$$

$$x - 2 - 2(\sqrt{x - 2}\sqrt{x - 7}) + x - 7$$

$$= x + 14 - 2(\sqrt{x + 14}\sqrt{x + 5}) + x + 5$$

$$-2(\sqrt{x - 2}\sqrt{x - 7}) = -2(\sqrt{x + 14}\sqrt{x + 5}) + 28$$

$$(-\sqrt{x - 2}\sqrt{x - 7})^2 = (-[\sqrt{x + 14}\sqrt{x + 5}] + 14)^2$$

$$x^2 - 9x + 14 = [(x + 14)(x + 5)] - [28(\sqrt{x + 14}\sqrt{x + 5})] + 196$$

$$x^2 - 9x + 14 = x^2 + 19x + 70 - 28(\sqrt{x + 14}\sqrt{x + 5}) + 196$$

$$28x + 252 = 28(\sqrt{x + 14}\sqrt{x + 5})$$

$$x + 9 = \sqrt{x + 14}\,\sqrt{x + 5}$$

$$(x + 9)^2 = (\sqrt{x + 14}\,\sqrt{x + 5})^2$$

$$x^2 + 18x + 81 = x^2 + 19x + 70$$

$$11 = x$$

Der Ingenieur: Sie haben richtig gerechnet. Man muß aber schon sehr aufpassen, will man sich nicht verrechnen; das werden Sie gemerkt haben!

Nun bleibt noch übrig, die Möglichkeit zu untersuchen, daß eine Wurzelgleichung mit Haupt- und Nebenwurzeln zu lösen ist. In diesem Falle potenziert man zweimal nacheinander, z. B.:

$$\sqrt{16 + 3\sqrt[3]{3x + 12}} = \sqrt{16 + \sqrt[3]{111x + 174}}$$

$$16 + 3\sqrt[3]{3x + 12} = 16 + \sqrt[3]{111x + 174}$$

$$3\sqrt[3]{3x + 12} = \sqrt[3]{111x + 174}$$

$$\left(3\sqrt[3]{3x + 12}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{111x + 174}\right)^3$$

$$27\,(3x + 12) = 111x + 174$$

$$81x + 324 = 111x + 174$$

$$150 = 30x$$

$$5 = x$$

25. Stunde:
Gleichungen ersten Grades mit zwei und mehr Unbekannten

Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten – Gleichsetzungsverfahren – Einsetzungsverfahren – Additions- und Subtraktionsverfahren – Bruchgleichungen – Gleichsetzungsverfahren mit Hilfsbuchstaben – Multiplikationsverfahren – Gleichungen ersten Grades mit drei und mehr Unbekannten – Eine praktische Aufgabe.

Der Ingenieur: Bei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten müssen zwei Gleichungen gegeben sein. Beide Gleichungen müssen voneinander unabhängig sein; die zweite Gleichung darf also nicht etwa aus der ersten Gleichung hervorgehen.

Die Gleichungen dürfen sich nicht widersprechen. Beispiel:

(1) $5x + 7y = 890$ (2) $4x - 3y = 110$

Solche Gleichung kann man nach verschiedenen Methoden lösen:

a) Gleichsetzungsverfahren von Newton, auch Kombinationsmethode oder Komparationsmethode genannt.
Zunächst wird x aussortiert.

(1) $5x + 7y = 890$

$$x = \frac{890 - 7y}{5}$$

(2) $4x - 3y = 110$

$$x = \frac{110 + 3y}{4}$$

Damit wird

$$\frac{890 - 7y}{5} = \frac{110 + 3y}{4}$$

$$3560 - 28y = 550 + 15y$$

$$3010 = 43y$$

$$y = 70$$

Nun wird der für y gefundene Wert in die Gleichung (1) eingesetzt. Es ist, da $7y = 490$,

(1a) $5x + 490 = 890$

$$5x = 400$$

$$x = 80$$

b) Einsetzungsverfahren von Newton, auch Substitutionsmethode genannt.

Die Aufgabe ist wiederum:

(1) $5x + 7y = 890$ (2) $4x - 3y = 110$

$x = \frac{890 - 7y}{5}$. Dieser Wert von x wird in Gleichung (2) eingesetzt:

(2a) $\frac{4\,(890 - 7y)}{5} - 3y = 110$

$$4\,(890 - 7y) - 15y = 550$$

$$3560 - 28y - 15y = 550$$

$$3560 - 550 = 43y$$

$$y = 70$$

$y = 70$ in Formel (1) eingesetzt, ergibt x wie bei Methode a).

c) Additions- und Subtraktionsverfahren von Barel, auch Methode der gleichen Koeffizienten oder englische Methode genannt.

Man muß zunächst eine Unbekannte ausscheiden, indem man durch Multiplikation gleiche Koeffizienten schafft. Die Regel lautet: Haben die auszuscheidenden Glieder gleiche Vorzeichen, so wird subtrahiert, bei ungleichen Vorzeichen wird addiert. Die Aufgabe lautet wieder: (1) $5x + 7y = 890$, (2) $4x - 3y = 110$. Hierin haben die x gleiche Vorzeichen, die y ungleiche Vorzeichen. Es wird also bei x subtrahiert, bei y addiert.

Subtraktion

x muß gleich werden. Gleichung (1) wird mit 4, Gleichung (2) mit —5 multipliziert

(1a) $20x + 28y = 3560$

(2a) $-20x + 15y = -550$

$20x - 20x$ hebt sich heraus

$43y = 3010$

$y = 70$

Addition

y muß gleich werden. Gleichung (1) wird mit 3, Gleichung (2) mit 7 multipliziert

(1a) $15x + 21y = 2670$

(2a) $28x - 21y = 770$

$21y - 21y$ hebt sich heraus

$43x = 3440$

$x = 80$

Der Praktiker: Wie ist es nun, wenn bei derartigen Gleichungen nicht ganze Zahlen, sondern Brüche vorkommen?

Der Ingenieur: Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten, bei denen die Glieder Brüche sind, werden ähnlich berechnet. Man hat auch hierfür mehrere Methoden.

a) Additions- und Subtraktionsverfahren: Es wird wie oben unter c) gerechnet.

Die Aufgabe laute:

(1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12}$ (2) $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -\frac{1}{12}$

Die Glieder mit x werden durch Multiplikation gleichgemacht und durch Subtraktion eliminiert (weggeschafft)

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} = \frac{14}{12}$$

$$-\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{5}{y} = \frac{15}{12}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{4}$$

$$y = 4$$

$\frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ in Gleichung (1) eingesetzt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$

$$x = 3$$

b) Gleichsetzungsverfahren mit Hilfsgrößen: Die Aufgabe bleibt die gleiche:

(1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12}$ (2) $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -\frac{1}{12}$

Es sei $\frac{1}{x} = v, \frac{1}{y} = w$. Dann ist

(1a) $v + w = \frac{7}{12}$ (2a) $2v - 3w = \frac{1}{12}$

$$v = \frac{7}{12} - w \qquad v = \frac{3w - \frac{1}{12}}{2}$$

$$\frac{7}{12} - w = \frac{3w - \frac{1}{12}}{2}$$

$$\frac{14}{12} - 2w = 3w - \frac{1}{12}$$

$$\frac{14}{12} + \frac{1}{12} = 3w + 2w$$

$$\frac{5}{4} = 5w$$

$$\frac{1}{4} = w = \frac{1}{y}; y = 4$$

Der Wert von w in Gleichung (1a) eingesetzt ergibt:

$$v + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}; v = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = \frac{1}{x}; x = 3.$$

c) Multiplikationsverfahren:

Die Gleichungen

(1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12}$ und (2) $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -\frac{1}{12}$ werden mit dem Produkt der Nenner (12 x y) multipliziert:

(3) $12y + 12x = 7xy$ (4) $24y - 36x = -xy$

$$\begin{array}{r} 24y + 24x = 14xy \\ -24y + 36x = xy \\ \hline 60x = 15xy \\ 60 = 15y \\ y = 4 \end{array}$$

x wird wie oben unter a) und b) berechnet.

Bei Gleichungen ersten Grades mit mehr als zwei Unbekannten müssen so viele voneinander unabhängige und einander nicht widersprechende Gleichungen gegeben sein, wie Unbekannte vorhanden sind. Bei drei Unbekannten also drei Gleichungen, bei sieben Unbekannten sieben Gleichungen. Man sucht durch eine der bisher erläuterten Methoden immer eine Unbekannte fortzuschaffen und dadurch die Zahl der Gleichungen zu verringern, bis man zu zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten gekommen ist. Es können die drei gleichen Verfahren zur Berechnung verwendet werden wie bei zwei Unbekannten.

a) Gleichsetzungsverfahren: Die Aufgabe sei:

(1) $3x + 2y + 5z = 64$
(2) $2x - 3y + 4z = 22$
(3) $-x + 2y - 3z = -16$

Hieraus folgt:

(4) $x = \frac{64 - 2y - 5z}{3}$, (5) $x = \frac{22 + 3y - 4z}{2}$, (6) $x = 16 + 2y - 3z$

Aus Gleichung (4) und (5) ergibt sich:

$$128 - 4y - 10z = 66 + 9y - 12z$$
$$62 = 13y - 2z$$
$$(7) \qquad y = \frac{62 + 2z}{13}$$

Aus Gleichung (5) und (6) ergibt sich:

$$22 + 3y - 4z = 32 + 4y - 6z$$
$$-10 = y - 2z$$
$$(8) \qquad y = -10 + 2z$$
$$\frac{62 + 2z}{13} = -10 + 2z$$
$$62 + 2z = -130 + 26z$$
$$192 = 24z$$
$$(9) \qquad z = 8$$

$z = 8$ in Gleichung (8) eingesetzt, ergibt $y = -10 + 16 = 6$.
$z = 8$ und $y = 6$ in Gleichung (6) eingesetzt, ergibt
$x = 16 + 12 - 24 = 4$.

b) Einsetzungsverfahren: Es seien wieder dieselben Gleichungen (1) bis (3) gegeben. Der Wert von x nach Gleichung (6) *) wird in Gleichung (1) und (2) eingesetzt:

$$(1a) \quad 3(16 + 2y - 3z) + 2y + 5z = 64$$
$$48 + 6y - 9z + 2y + 5z = 64$$
$$(2a) \quad 2(16 + 2y - 3z) - 3y + 4z = 22$$
$$32 + 4y - 6z - 3y + 4z = 22$$
$$(7a) \qquad 8y - 4z = 16$$
$$(8a) \qquad y - 2z = -10$$
$$y = 2z - 10$$

Der Wert von y nach Gleichung (8a) wird in Gleichung (7a) eingesetzt:

$$8(2z - 10) - 4z = 16$$
$$12z = 96$$
$$(9a) \qquad z = 8.$$

Dieser Wert in Gleichung (8a) eingesetzt, ergibt: $y = 16 - 10 = 6$. y und z in (6) eingesetzt, ergeben: $x = 16 + 12 - 24 = 4$.

c) Additions- und Subtraktionsverfahren: Es seien wieder dieselben Gleichungen (1) bis (3) gegeben:

(1) $3x + 2y + 5z = 64$
(2) $2x - 3y + 4z = 22$
(3) $-x + 2y - 3z = -16$.

*) Es wird immer die einfachste Gleichung genommen.

Aus (1) und (2) wird: $6x + 4y + 10z = 128$

$-6x + 9y - 12z = -66$

subtrahiert: (4) $13y - 2z = 62$

Aus (2) und (3) wird: $2x - 3y + 4z = 22$

$-2x + 4y - 6z = -32$

addiert: (5) $y - 2z = -10.$

Gleichung (5) von Gleichung (4) subtrahiert, ergibt:

(4) $13y - 2z = 62$

(5) $-\ y + 2z = 10$

$12y \quad = 72$

(6) $y = 6$

Der Wert von $y = 6$ in Gleichung (1) und (2) eingesetzt, ergibt:

$3x + 12 + 5z = 64$ $\qquad$ $2x - 18 + 4z = 22$

(1a) $3x + 5z = 52$ $\qquad$ (2a) $2x + 4z = 40$

$6x + 10z = 104$

$-6x - 12z = -120$

subtrahiert: $-2z = -16$

(7) $z = 8$

Der Wert von $y = 6$ und $z = 8$ in Gleichung (1) eingesetzt, ergibt:

(1b) $3x + 12 + 40 = 64$

$3x = 12$

$x = 4.$

Der Praktiker: Wenn man sich in die Gleichungen hineindenkt, so ist die Auflösung nicht besonders schwierig. Die Frage ist nur: Wann und wo ist es notwendig, derartige Gleichungen aufzulösen? Ich erinnere mich, daß in der Schule für Gleichungen immer Aufgaben gestellt wurden wie die: Ein Vater ist heute 4 Jahre älter, als das Dreifache vom Alter seines Sohnes beträgt. Nach 18 Jahren wird er zweimal so alt wie dieser sein. Wie alt ist heute der Vater und wie alt der Sohn? Mit solchen künstlich aufgestellten Gleichungen kann man doch nichts anfangen!

Der Ingenieur: Mit solcher Gleichung allerdings nicht. Wie wäre es aber mit der folgenden Aufgabe:

Ein Kurzwellensender wird auf seiner überseeischen Gegenstation mit „Doppelzeichen" gehört. Einmal wird das Zeichen empfangen, das auf dem kürzeren, direkten Weg in der Empfangsstation eintrifft, und außerdem ein zweites Signal, das den indirekten, längeren Weg um die Erde genommen hat. Das zweite Signal trifft 0,053 sec später ein. Wieviel Kilometer hat das erste Signal zurückgelegt und wieviel Kilometer das zweite Signal? Wieviel Kilometer ist die Empfangsstation von der Sendestation entfernt?

Der Praktiker: Wie kann man denn eine Zeitdifferenz von 0,053 sec messen? Mit der Stoppuhr gewiß nicht!

Der Ingenieur: Mit der Stoppuhr allerdings nicht. Auf dem Schirm einer Elektronenstrahlröhre aber kann man noch kürzere Zeiten feststellen.

Der Praktiker: Na, ich werde dann mal mein Heil versuchen. Die elektrischen Wellen legen 300 000 km in der Sekunde zurück. Da der Erdumfang 40 000 km beträgt, betragen die Strecke a (direkter Weg) und b (indirekter Weg) zusammen 40 000 km. Diese 40 000 km durcheilen die elektrischen Wellen in $\frac{40\,000}{300\,000} = 0{,}1333$ sec. Die Strecke a wird in der Zeit x, die Strecke b in der Zeit y durcheilt. Wir können also folgende Gleichungen aufstellen:

$x + y = 0{,}1333$ $\qquad$ $x + 0{,}053 = y$ oder $0{,}053 = y - x$.

Es ist nach dem Additions- und Subtraktionsverfahren

$$\begin{array}{rr} x + y = & 0{,}1333 \\ -x + y = & 0{,}053 \\ \hline 2y = & 0{,}18633 \\ y = & 0{,}09317 \text{ sec.} \end{array} \qquad \begin{array}{rr} x + y = & 0{,}1333 \\ x - y = & -0{,}053 \\ \hline 2x = & 0{,}08033 \\ x = & 0{,}04017 \text{ sec.} \end{array}$$

Die Entfernungen a und b verhalten sich zueinander wie die Zeiten x und y: $a : b = x : y = 0{,}04017 : 0{,}09317$, und die gesamte Strecke $a + b = 40\,000$ km : $a = 0{,}1333 : 0{,}04017$. Es ist also $0{,}1333a = 40\,000 \cdot 0{,}04017 = 1606{,}8$, $a = \frac{16\,068\,000}{1333} = 12\,054$ km, und b ist $40\,000 - 12\,054 = 27\,946$ km lang.

Sende- und Empfangsstation sind also 12 054 km (= Entfernung a) voneinander entfernt.

Der Ingenieur: Das war völlig richtig gerechnet. Sie sehen also, auch in der Funktechnik ist es nützlich, Gleichungen lösen zu können.

26. Stunde:
Gleichungen zweiten Grades

Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten: Einteilung – Reinquadratische Gleichungen – x^2 hat zwei Wurzeln! – Gemischtquadratische Gleichungen – Ein Beispiel aus der Praxis: Potentiometerberechnung – Weitere Methoden der Auflösung – Gleichungen zweiten Grades mit zwei und mehr Unbekannten.

Der Ingenieur: Für die Gleichungen ersten Grades kann man folgende Grundformeln aufstellen:

a) mit einer Unbekannten: $a \quad + b \quad = x$; $ax + b = cx - d$

b) mit zwei Unbekannten: $a_1x + b_1y = c_1$
$a_2x + b_2y = c_2$

c) mit drei Unbekannten: $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$
$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

a, b, c, d . . . sind hierbei Koeffizienten (auch natürliche Zahlen); x, y und z sind die Unbekannten. a, b, c, d . . . können in jeder Form vorkommen, sowohl als ganze Zahlen als auch als Bruch, als Potenz, als Wurzel usw.; x, y, z dagegen treten nur in der ersten Potenz auf.

Kommen dagegen die Unbekannten x, y, z in der zweiten Potenz vor, so bezeichnet man die Gleichung als Gleichung zweiten Grades oder als quadratische Gleichung. Kommt die Unbekannte allein in der zweiten Potenz vor, so nennt man die Gleichung reinquadratisch. Ist x nicht nur in der zweiten Potenz, sondern daneben noch in der ersten Potenz vorhanden, so spricht man von einer gemischtquadratischen Gleichung.

Genau wie bei den Gleichungen ersten Grades gibt es auch bei Gleichungen zweiten Grades solche mit einer, mit zwei, sowie mit drei und mehr Unbekannten.

Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten haben, sofern es sich um reinquadratische Gleichungen handelt, die allgemeine Form $ax^2 = b$. Dividiert man die Gleichung durch a, so entsteht die Grundform $x^2 = \frac{a}{b}$. Setzt man für den Quotienten $\frac{a}{b}$ den Wert q ein, so entsteht die Normalform $x^2 = q$ bzw. $x^2 - q = 0$. Auf diese Normalform muß jede reinquadratische Gleichung mit einer Unbekannten zurückgeführt werden. Evtl. vorhandene Brüche, Klammern, Wurzeln usw. müssen vorher beseitigt werden.

Ein einfaches Beispiel: $(x + 5)(x - 5) = 264$. In der 9. Stunde hatten wir gelernt, daß $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Rechnen Sie die Aufgabe bitte aus!

Der Praktiker: Es ist demnach $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25 = 264$
$x^2 = 289$
$x = 17$

Das ist ja kinderleicht!

Der Ingenieur: Und doch hat die Sache einen Haken. Daß $\sqrt{289} = 17$ ist, ist klar, denn $(+17)^2 = 289$. Wieviel ist nun aber $(-17)^2$?

Der Praktiker: Auch 289!

Der Ingenieur: Und damit ist aufgezeigt, daß x^2 zwei Wurzeln hat: + x und − x! Man spricht von einer Biformität der Quadratwurzel aus positiven Radikanden.

In der Ihnen gestellten Aufgabe würde man deshalb sagen: $x^2 = 289$, $x_1 = +17$, $x_2 = -17$.

Es gibt auch reinquadratische Gleichungen, die zunächst den Anschein erwecken, als ob sie gemischtquadratisch sind. Rechnen Sie z. B. einmal folgende Aufgabe aus:

$(x-4)\ (x-7)\ (x+2) = (x^2-2x)\ (x-3) - 728.$

Der Praktiker: Zunächst multipliziere ich die beiden ersten Binome aus: $(x-4)\ (x-7)\ (x+2) = (x^2-2x)\ (x-3) - 728$

$(x^2-4x-7x+28)\ (x+2) = x^3-2x^2-3x^2+6x-728$

$x^3-4x^2-7x^2+28x+2x^2-8x-14x+56$

$= x^3-2x^2-3x^2+6x-728$

$x^3-9x^2+6x+56 = x^3-5x^2+6x-728$

$4x^2 = 784$

$x^2 = 196$

$x_1 = +14;\ x_2 = -14.$

Der Ingenieur: Sind Brüche vorhanden, so schafft man sie zunächst weg, indem man die Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert, genau wie bei den Gleichungen ersten Grades. Berechnen Sie also bitte die Gleichung $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-4} = \frac{6}{x-5}$.

Der Praktiker: Es ist $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-4} = \frac{6}{x-5}$

$2\,(x-4)\ (x-5) + 3\ (x-3)\ (x-5) = 6\,(x-3)\ (x-4)$

$2\,(x^2-9x+20) + 3\ (x^2-8x+15) = 6\,(x^2-7x+12)$

$5x^2-42x+85 = 6x^2-42x+72$

$x^2 = 13$

x = ca. 3,6. Einen genauen Wert kann man nicht sagen, da es eine irrationale Zahl ist. Wie sagt man denn jetzt für x?

Der Ingenieur: Man rechnet in einem solchen Fall die Wurzel nicht weiter aus. Es ist dann eben $x_1 = +\sqrt{13}$, $x_2 = -\sqrt{13}$.

Sind Wurzeln vorhanden, so wird zunächst ähnlich vorgegangen wie bei Gleichungen ersten Grades: Quadrierung beider Seiten. Versuchen Sie bitte die Gleichung $\sqrt{85+28x} = 2x+7$ zu lösen!

Der Praktiker: Quadriert ergibt sich: $85 + 28x = (2x+7)^2$

$= 4x^2 + 28x + 49$

$4x^2 = 36$

$x^2 = 9$

$x_1 = +3,\ x_2 = -3.$

Der Ingenieur: Wie Sie sehen, ist bei reinquadratischen Gleichungen immer $x_1 + x_2 = 0$.

Nun kommen wir zu den gemischtquadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten. Sie haben die allgemeine Form $ax^2 + bx + c = 0$. Klammern, Brüche, Wurzeln usw. müssen auch hier zunächst beseitigt werden. Dann muß x^2 vom

Koeffizienten a befreit werden, indem man die Gleichung durch a dividiert. Damit wird $ax^2 + bx + c = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Setzt man für den Quotienten $\frac{b}{a}$ den Ausdruck p und für $\frac{c}{a}$ den Wert q ein, so erhält man die Normalform $x^2 + px + q = 0$; $x^2 + px = -q$.

Zur Auflösung dieser Gleichung müssen wir wieder davon ausgehen, daß $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$. Die linke Seite der Normalform $(x^2 + px)$ entspricht $a^2 + 2ab$; es ist demnach $p = 2b$, $b = \frac{p}{2}$.

Ergänzt man das fehlende dritte Glied, indem man $b^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$ auf beiden Seiten der Normalform zuaddiert, so erhält man:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Es ist $x_1 + x_2 = p$

$x_1 \cdot x_2 = q$

Ein Beispiel: $2x^2 - 16 = 7x$

Durch 2 dividiert: $x^2 - 8 = \frac{7}{2}x$

$$x^2 - \frac{7}{2}x = 8$$

$$x^2 - \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = 8 + \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = 8 + \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

$$x - \frac{7}{4} = \pm\sqrt{8 + \left(\frac{7}{4}\right)^2}$$

$$x = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{128}{16} + \frac{49}{16}}$$

$$x = \frac{7}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{177} = \frac{1}{4}\left(7 \pm \sqrt{177}\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{4}\left(7 + \sqrt{177}\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(7 - \sqrt{177}\right)$$

Versuchen Sie bitte einmal folgende Aufgabe zu lösen:

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+3} = \frac{6}{x+1}.$$

Der Praktiker: Mit dem Generalnenner multipliziert, ergibt sich

$$\begin{aligned}
2(x+3)(x+1) + 3(x-1)(x+1) &= 6(x-1)(x+3)\\
2(x^2+4x+3) + 3(x^2-1) &= 6(x^2+2x-3)\\
2x^2+8x+6+3x^2-3 &= 6x^2+12x-18\\
-x^2-4x &= -21\\
x^2+4x &= 21\\
x^2+4x+2^2 &= 21+2^2\\
(x+2)^2 &= 25\\
x &= -2 \pm 5\\
x_1 &= +3\\
x_2 &= -7
\end{aligned}$$

Der Ingenieur: Nun machen Sie bitte die Probe aufs Exempel: $x_1 + x_2$ muß p, und $x_1 \cdot x_2$ muß q ergeben.

Der Praktiker: Es ist $x_1 + x_2 = +3-7 = -4$. Der Koeffizient von x (in der Normalform $x^2 + 4x = 21$; $x^2 + 4x - 21 = 0$) ist 4.

Das stimmt also. Und es ist $x_1 \cdot x_2 = +3 \cdot -7 = -21$. Also ist die Auflösung der Gleichung richtig.

Der Ingenieur: Zum Schluß noch eine Aufgabe mit Brüchen und Wurzeln. Lösen Sie bitte folgende Gleichung auf:

$$\frac{6}{\sqrt{x+4}} + \sqrt{5x-24} = \sqrt{x+4}.$$

Der Praktiker: Zunächst bringe ich den Bruch weg, indem ich die Glieder der Gleichung mit dem Nenner $\sqrt{x+4}$ multipliziere:

$$\begin{aligned}
6 + \sqrt{5x-24}\,\sqrt{x+4} &= x+4\\
\sqrt{5x-24}\,\sqrt{x+4} &= x+4-6\\
(5x-24)(x+4) &= (x-2)^2\\
5x^2-4x-96 &= x^2-4x+4\\
4x^2 &= 100\\
x^2 &= 25\\
x_1 &= +5,\ x_2 = -5
\end{aligned}$$

Kommen solche gemischtquadratischen Gleichungen denn auch in der Praxis vor?

Der Ingenieur: Aber gewiß! Ich werde Ihnen gleich einmal eine Aufgabe aus der Praxis aufgeben. Ein Gerät, welches eine Stromaufnahme von 40 Watt hat und für eine Netzspannung von 110 Volt

dimensioniert ist, soll an einem 220-Volt-Netz betrieben werden. Es steht ein Schiebepotentiometer mit einem Widerstand von 750 Ω zur Verfügung. Wie muß der Abgriff desselben stehen, bzw. welcher Teilwiderstand muß abgegriffen werden, damit das Gerät 110 Volt bekommt?

Der Praktiker: Sicher muß der Abgriff ungefähr in der Mitte stehen.

Der Ingenieur: Wir wollen es lieber berechnen. Der Stromverbraucher, also unser Gerät, liegt parallel zu einem Teil des Schiebepotentiometers, und setzt dadurch den Widerstand des Teiles zwischen

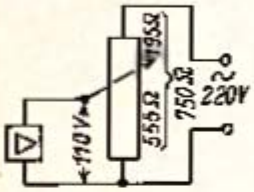


Bild 42. Berechnung eines Spannungsstellers

Nullpol und Mittelabgriff herab (siehe Bild 42). Wir müssen deshalb zunächst den Widerstand des Stromverbrauchers ausrechnen.

Der Praktiker: Es ist $\frac{U^2}{P} = R$, also $\frac{110 \cdot 110}{40} =$ ca. 300 Ω.

Der Ingenieur: Nun müssen wir aus den gegebenen Werten eine Gleichung aufstellen. Der Widerstand des Schiebepotentiometers R_q beträgt 750 Ω. Er setzt sich aus den beiden unbekannten Teilwiderständen x (von einem Pol bis zum Abgriff) und y (vom Abgriff bis zum andern Pol) zusammen. Es ist also $x + y = R_q$. $y = R_q - x$. Es ist weiterhin die Parallelschaltung des Verbraucherwiderstandes R_b und x: $R_b \parallel x = \frac{R_b \cdot x}{R_b + x}$, und damit muß, da 110 V die Hälfte von 220 Volt ist, $\frac{R_b \cdot x}{R_b + x} = R_q - x$ sein.

Hieraus erhält man durch Multiplikation beider Seiten mit $= R_b + x$ die Gleichung $R_b \cdot x = (R_q - x)(R_b + x)$. Diese Gleichung ist unser Ausgangspunkt. Die entsprechenden Werte eingesetzt ergibt:

$300x = (750 - x)(300 + x)$
$300x = 225\,000 - 300x + 750x - x^2$
$x^2 - 150x - 225\,000 = 0$. Damit haben wir die Normalform einer Gleichung zweiten Grades. Nun rechnen Sie bitte weiter!

Der Praktiker: Wir müssen das Glied b^2 ergänzen. Dann ist
$x^2 - 150x + 75^2 = 225\,000 + 75^2$
$(x - 75)^2 = 225\,000 + 5625$
$x - 75 = \pm \sqrt{230\,625}$
$x = +75 \pm 480$
$x_1 = 555\ \Omega$, $y = 750 - 555 = 195\ \Omega$.

Die Gegenprobe: Es wäre $x_2 = -405$; $555 - 405 = 150$, $555 \cdot 405 = 234\,775 \approx 225\,000$. Die Differenz erklärt sich daraus, daß bei $\sqrt{230\,625} = \pm 480$ nicht genau gerechnet, sondern abgerundet wurde.

Der Ingenieur: Da 110 V die Hälfte von 220 Volt ist, muß $R_b \parallel x = y$ sein. Es ist $\frac{300 \cdot 555}{300 + 555} = 195\ \Omega$. Sie sehen also, daß die Rechnung stimmt. Und daß der Abgriff des Potentiometers nicht in der Mitte stehen darf, sondern nach mehr als $^2/_3$ der Gesamtlänge.

Es gibt noch weitere Methoden zur Lösung von Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten: die Auflösung durch Faktorenzerlegung, und die Substitutionsmethode. In manchen Fällen kann man sich ihrer vorteilhafterweise bedienen. Da sie aber nicht in allen Fällen zum Ziele führen, soll von einer Behandlung abgesehen werden. Dann gibt es noch die grafische Methode. Sie liefert schnell ein angenähertes, aber kein genaues Resultat. Man kann Gleichungen zweites Grades auch mit dem Rechenschieber lösen. Hierbei arbeitet man nach einer Näherungsmethode und muß einige Male den Näherungswert schätzen, bis man zu einem Resultat kommt. Ich bin überzeugt, daß Sie dann, wenn Sie diese Methode einmal anwenden wollten, den Gang der Rechenarbeit schon längst wieder vergessen haben. Deshalb will ich Sie mit dieser Methode erst gar nicht behelligen.

Der Praktiker: Wie löst man nun Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten auf?

Der Ingenieur: Bei Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten müssen wiederum zwei Gleichungen gegeben sein. Man versuche sie zunächst in ähnlicher Art zu lösen wie die Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten, z. B. nach dem Einsetzungsverfahren, nach dem Additions- und Subtraktionsverfahren und nach dem Gleichsetzungsverfahren mit Hilfsgrößen. Man kommt aber nicht in allen Fällen zum Erfolge. Bei vollquadratischen Systemen z. B. (beide Gleichungen sind quadratisch) kommt man bei der Auflösung oft zu Gleichungen vierten Grades (x^4), welche mit den bisherigen Mitteln nicht weiter lösbar sind.

Gleichungen zweiten Grades mit mehr als zwei Unbekannten kann man nur in einzelnen besonderen Fällen mit Hilfe quadratischer Gleichungen lösen.

Literaturverzeichnis

Demjenigen, der nach der Durcharbeitung von „Funktechniker lernen Formelrechnen" Freude an der Mathematik gefunden hat, und der sich weiter fortbilden will, seien folgende Bücher empfohlen:

A. Interessant und fesselnd geschriebene, leichtverständliche Werke:

1. E. Colerus: Vom Einmaleins zum Integral, Berlin 1948, Zsolnay
2. A. Nikitschek: Im Zaubergarten der Mathematik, Berlin 1944, Scherl

B. Mathematische Standardwerke:

3. F. Bergtold: Mathematik für Radiotechniker und Elektroniker, 3. Aufl., München 1964, Franzis-Verlag
4. R. Doerfling: Mathematik für Ingenieure, 5. Aufl., München 1950, Oldenbourg
5. Euler: Algebra, Reclams Universalbibliothek
6. G. Scheffers: Lehrbuch der Mathematik, 12. Aufl., 1946

C. Spezialgebiete der Mathematik:

7. G. Feilhauer und R. Wunder: Grundlagen der Arithmetik, Algebra und Trigonometrie unter Berücksichtigung der Flug- und Funktechnik, 7. Aufl., Berlin 1949, Georg Siemens
8. dito: Algebra, Trigonometrie und Stereometrie für Fortgeschrittene, 3. Aufl., Berlin 1949, Georg Siemens
9. R. Gans: Vektoranalysis mit Anwendungen auf Physik und Technik, 7. Aufl., 1950
10. R. Rothe: Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure, 5 Bände, 4. bis 8. Aufl.
11. S. P. Thompson: Höhere Mathematik – und doch verständlich.

Stichwortverzeichnis

Achsenkreuz 12
Addition 7, 19
–, arithmetische 81
–, geometrische 81, 82
Additions- und Subtraktionsverfahren 112, 115
Aggregat 43 ff., 98
Algebra 7 ff.
Ambe 97
Anfangsglied einer Reihe 102
Anfangskapital 106
Anodenwechselspannung 73
Anodenwechselstrom 74
arabische Ziffern 28
arabisches Zahlensystem 28
arithmetische Addition 81
– Proportion 18, 19
– Reihe 102 ff.
arithmetisches Mittel 103
Außenglieder 17

Basis 38, 88
Bezugspunkt 11
Biformität der Quadratwurzel 118
Binom 45, 96
Binomialkoeffizient 97 ff.
Binomialrechnung 98
binomischer Lehrsatz 97
Blindwiderstand 25, 81
Briggsscher Logarithmus 88
Bruch 16, 61, 108, 113
–, echter 61
–, gemeiner 16, 26
–, unechter 61
Bruchrechnung 18, 19
Brüche, gleichnamige 20
–, Kürzen 19
–, ungleichnamige 20
Buchstaben 7

Centi 30

Dämpfungsverhältnis 28
deka 29
dezi 30
Dezibel 105
Dezimalbruch 18, 26, 27, 62
–, unendlicher nichtperiodischer 69
Dielektrizitätskonstante 71
Differenz 19, 102
Dividend 19, 67
Division 7, 16 ff., 19, 21, 67, 91
– von Potenzen 40
– von Wurzeln 49
Divisor 19, 67
Drahtdurchmesser 83
Drahtquerschnitt 83
Dreieck, rechtwinkliges 80, 82
Durchgriff 27
Durchmesser 83, 84

Effektivwert 84
Einheiten, Schreibweise 71
Einsetzungsverfahren 112, 115
Elementenzahl 97
eliminieren 113
Endglied einer Reihe 103, 105
Endkapital 106
endliche Reihe 102
Endröhre 73
Exponent 29 ff.
–, gebrochener 48
–, negativer 30, 31, 42, 47

Faktor 16, 19, 97
Fakultät 98
Frequenz 75

Genauigkeit 32, 36, 56, 58, 68, 89
geometrische Addition 81, 82
– Proportion 17, 18
– Reihe 104 ff.
geometrisches Mittel 105
Gewicht eines Körpers 84
giga 29
Gittervorspannung 11
Gleichheitszeichen 14
gleichnamige Brüche 20
Gleichnamigmachen 20

Gleichsetzungsverfahren 112, 114
– mit Hilfsgrößen 113
Gleichung 14, 107 ff.
–, identische 14
Gleichungen 107 ff.
– ersten Grades 107
–, gemischtquadratische 118, 119
–, quadratische 118
–, reinquadratische 118
–, unabhängige 111
– zweiten Grades 117
griechisches Alphabet 7
Größenordnung 30
Grundrechnungsarten 6, 7
Grundzahl 19, 29, 36
Gruppengröße 97

Harmonisches Mittel 103
Hauptnenner 108, 119
hekto 29
Hektoliter 29
Hilfsgrößen 113
hintereinander geschaltete Widerstände 25
hochstehende Ziffern 29
Hypotenuse 80 ff.

Identität 14
Imaginärteil 81
Index 28
indirekter Weg (KW-Empfang) 116
induktiver Widerstand 25, 81
Innenglieder 17
Interpolieren 90, 91
Inversion 28

Kapazität 25, 71
kapazitiver Widerstand 25, 42, 81
Kathete 81, 82
Kegel 83
Kegelvolumen 84
Kehrwert 25, 27, 76
Kelvingrad 11
Kennlinienfeld 33, 63
Kennziffer 89 ff.
kilo 29
Klammer 8 ff.
Klammerregeln 13 ff.
Koeffizient 97, 112, 118
Kombinationsmethode 112
Kombinatorik 101
Komma 26, 68, 72, 89
Komparationsmethode 112
komplexer Widerstand 81
Kondensator 25, 71
Konstante 7, 63
Kreisfläche 82, 84
Kreisumfang 82
Kubikwurzel 37, 57, 59, 77
Kubus 37, 56
Kugelvolumen 84
Kürzen von Brüchen 19

Läufer 52, 64
Lehrsatz, binomischer 97
– des Pythagoras 80
Leitfähigkeit 27
Leitwert 24
Logarithmen, Dividieren 91
–, Multiplizieren 90
–, Potenzieren 92
–, Radizieren 92
Logarithmenskala, Rechenschieber 96
Logarithmensysteme 88
Logarithmentafel 89, 94, 95
Logarithmieren 90
logarithmische Skala 33
logarithmische Teilung 33, 53, 70
logarithmisches Papier 33
Logarithmus 88
–, Briggsscher 88
–, dekadischer 88
–, natürlicher 88

Malpunkt 7
Mantisse 89
mathematische Rangordnung 8
– Stufenleiter 8, 37, 40
mega 29
Methode der gleichen Koeffizienten 112
mikro 30
Mikron 30
milli 30

Minuend 19
Minuszeichen 10
Mittel, arithmetisches 103
–, geometrisches 105
–, harmonisches 103
Multiplikand 19
Multiplikation 7, 15, 19, 66
– von Aggregaten 44
– von Potenzen 39
– von Wurzeln 49
Multiplikationsverfahren 114
Multiplikator 19

Nano 30
Nenner 16, 19, 67
Newton 112
Normalform 118, 120
Null 28
Nullpunkt 11
–, absoluter 11
Numerus 88

Ohmscher Widerstand 25, 81
Ohmsches Gesetz 14, 17, 122
Oktave 98

Papier, doppelt-lineares 33
–, doppelt-logarithmisches 33
–, halblogarithmisches 33
–, logarithmisches 33
Pascalsches Zahlendreieck 97
Permutation 101
Pferdestärke 84
pico 30
positive Zahlen 11
Potenz 29
–, nullte 31, 47, 100
Potenzen, Division 40
–, Multiplikation 39
–, Radizieren 40, 63
Potenzieren 29 ff., 56
– mit Logarithmen 92
– von Potenzen 40
– von Wurzeln 46, 63
Probe 19, 121
Produkt 16, 19
Proportion, arithmetische 18, 19
–, geometrische 17, 18
Pythagoreischer Lehrsatz 80

Quadrat 38
Quadratwurzel 37, 56, 58
Quaterne 97
Querschnitt 83, 84
Quinterne 97
Quotient 19, 21, 67, 104

Radikand 37, 46
Radizieren 37, 56
– von Potenzen 40, 63
Rangordnung, mathematische 8
Realteil 81
Rechengesetz 7
Rechenregel 7
Rechenschieber 51 ff.
–, Aufbau 51
–, Dividieren 67, 75
–, Genauigkeit 56, 58, 68
–, Logarithmenskala 86
–, Multiplizieren 66, 76
–, Potenzieren 56, 63, 78
–, Radizieren 56, 63, 78
–, Skalen 52 ff., 64 ff.
–, Zwischenwerte ablesen 54
Rechentafel 36
Rechnungsarten 7
–, höhere 8, 36
rechtwinkliges Dreieck 80, 82
Regeldetri-Verfahren 17
Reihe 101
–, arithmetische 102 ff.
–, endliche 102
–, geometrische 104 ff.
–, unendliche 102, 105
Resonanzschärfe 28
Rest 19
Resultat 19
reziproker Wert 23, 24, 27, 76
Reziprokskala 76, 85
Röhre 6

Saugkreis 81
Scheinwiderstand 81
Schieber 52
Schulrechenschieber 51
Selbstinduktion 25
Septerne 97
Sexterne 97

Siemens 27
Skala, logarithmische 33
Skalen des Rechenschiebers 52 ff., 64 ff.
–, versetzte 85
Spannungsteiler 122
Spezial-Rechenschieber 86
Spitzenwert 84
Spule 25
Stabkörper 52
Stellenwerttafel 69
Stellenzahl 26, 68, 72, 89
– hinter dem Komma 28, 89
Stellenzahlregeln 68
Substitutionsmethode 112
Subtrahend 19
Subtraktion 7, 19
Summand 19
Summe 19, 104
System Darmstadt 86

Tabellenbildung 73, 75
Taschenrechenschieber 53, 86
Teiler 19
Teilung, logarithmische 33, 53, 70
–, trigonometrische 84
Teilungen des Rechenschiebers 52 ff., 64 ff.
Teilwert 19
tera 29
Terne 97
Thermometer 11
tiefstehende Ziffern 28

$U^2/^2$-Gesetz 41, 63
Umdrehen der Zunge 75 ff.
Umrechnung Durchmesser/Querschnitt 84
– Effektivwert/Spitzenwert 84
– Watt/PS 84
Unbekannte 7, 108, 118
unbestimmter Wert 48
unechter Bruch 61
unendliche Reihe 102, 105
ungleichnamige Brüche 20
Unione 97

Variable Größen 7
Variation 101

veränderliche Größen 7
Verhältnis 17
Verstärkungsfaktor 27
Vorzeichen 11
Vorzeichenregeln 13, 15, 21, 45

Watt 84
Wechselstromwiderstand 24, 25, 42, 81
Wellenlänge 75
Widerstand 17, 24
–, induktiver 25, 81
–, kapazitiver 25, 42, 81
–, komplexer 81
–, ohmscher 25, 81
Widerstände, hintereinander geschaltete 25
–, parallel geschaltete 24
Wurzel 37, 46, 47 ff., 60
–, nullte 47
Wurzelbruch 49
Wurzelexponent 37, 41
Wurzelziehen 37

Zähler 16, 19, 67
Zahlen, algebraische 15, 21
–, allgemeine 7, 11
–, bestimmte 7
–, gerichtete 11, 12, 21
–, irrationale 89
–, natürliche 11, 118
–, negative 11
–, positive 11
Zahlendreieck, Pascalsches 97
Zahlensystem, arabisches 28
Zahlenwerte, konstante 7, 63
Ziffern, arabische 28
–, hochstehende 29
–, tiefstehende 28
Zinseszinsrechnung 106
Zinsfaktor 106
Zinssatz 106
Zunge 52 ff., 75
–, umgedrehte 75 ff.
Zwischenwerte beim Rechenschieber 54
Zylinder 83
Zylindervolumen 83

Gesamtverzeichnis der Radio-Praktiker-Bücherei

* Auch als Ganzleinen-Taschenband erhältlich **CB** = Cellu-Band

1 Moderne Endröhren und ihre Schaltungen

2/2a Die UKW-Röhren und ihre Schaltungen

3/5 UKW-FM-Rundfunk-Praktikum **CB**

6 Antennen für Rundfunk- und UKW-Empfang

7 Neuzeitliche Schallfolienaufnahme

8 Vielseitige Verstärkergeräte für Tonaufnahme und Wiedergabe

9/10 Tonbandgeräte-Praxis **CB**

11 Mikrofone. Aufbau, Verwendung und Selbstbau

12 Röhrenmeßgeräte in Entwurf und Aufbau

13 Schliche und Kniffe für Radiopraktiker, Teil I

14 Wellen und Frequenzen **CB**

15 Zweikreis-Empfänger

16 Widerstandskunde f. Radio-Prakt.

17 Prüfsender für UKW-Empfänger (UKW-Meßgeräte, Teil 1)

18/18 Radio-Röhren **CB**

20 Methodische Fehlersuche in Rundfunkempfängern

21/21a Funktechniker lernen Formelrechnen, Band I **CB**

*22/23 Lehrgang Radiotechnik, Band I **CB**

*24/25 Lehrgang Radiotechnik, Band II

28 Meß- und Schaltungspraxis für Heimton und Studio

27/27a Rundfunkempfang ohne Röhren **CB**

28/28a Die Glimmröhre u. ihre Schaltungen **CB**

29/30 Kleines ABC der Elektroakustik **CB**

31/32 Sender-Baubuch für Kurzwellen-Amateure, Teil I **CB**

33 Röhrenvoltmeter **CB**

34 Einzelteilprüfung **CB**

36 Die Prüfung des Zwischenfrequenz-Verstärkers und Diskriminators beim UKW-Empfänger (UKW-Meßgeräte, Teil 2)

37/38 Fehlersuche durch Signalverfolgung und Signalzuführung

41 Kurzwellenempfänger f. Amateure

43 Musikübertragungs-Anlagen **CB**

44 Kurzwellen-Amateurantennen für Sendung und Empfang **CB**

45/46 UKW-Sender- und Empfänger-Baubuch für Amateure **CB**

47/47a Reiseempfänger mit Transistoren **CB**

48 Kleines Praktikum der Gegenkopplung

50 Praktischer Antennenbau **CB**

51 Fernseh-Bildfehler-Fibel **CB**

55/56 Fernsehtechnik von A bis Z **CB**

57 Tönende Schrift

58 Morselehrgang **CB**

59 Funk-Entstörungs-Praxis **CB**

60 Die Widerstand-Kondensator-Schaltung

61 Nomogramme als Hilfsmittel für den Funktechniker

62/62a Englisch für Radiopraktiker **CB**

*63/65a Moderne Schallplattentechnik

66/67 Sender-Baubuch für Kurzwellen-Amateure, Teil II **CB**

*68/70 Formelsammlung für den Radio-Praktiker **CB**

*71 Bastelpraxis, Band I

72/73 Drahtlose Fernsteuerung von Flugmodellen **CB**

74 Einkreis-Empfänger mit Röhren und Transistoren **CB**

75 So gleicht der Praktiker ab

*76 Bastelpraxis, Band II

77 Der Selbstbau von Meßeinrichtungen für die Funkwerkstatt

78 Schwebungssummer

*79/79a Bastelpraxis, Band III

80/80b Das Spulenbuch **CB**

*81/83a Die elektrischen Grundlagen der Radiotechnik

84 Fernsehantennen-Praxis **CB**

85 Hi-Fi-Schaltungs- und -Baubuch

86/87 Berufskunde des Radio- und Fernsehtechnikers **CB**

88 Schliche und Kniffe für Radiopraktiker, Teil II

89/90a Autoempfänger

91/92 Superhet-Empfänger

93/94 Fernsteuerschaltungen mit Transistoren für Flugmodelle **CB**

95/96 Fotozellen u. ihre Anwendung **CB**

97/98 Kleines Stereo-Praktikum **CB**

99 Wie arbeite ich mit dem Elektronenstrahl-Oszillografen? **CB**

100 Daten- und Tabellensammlung für Radiopraktiker **CB**

101/102 Elektronische Orgeln und ihr Selbstbau **CB**

103 Die Wobbelsender **CB**

104 Transistorsender für die Fernsteuerung **CB**

105 Lautsprecher und Lautsprechergehäuse für HiFi **CB**

106/107 Netztransformatoren und Drosseln **CB**

KUNZE, FRITZ

Funktechniker lernen Formelrechnen **21/21a**

Zwei Tatsachen lassen sich schwer miteinander in Einklang bringen, die allgemein zu beobachtende Scheu vor der Mathematik, und die Notwendigkeit, daß Funk- und Fernsehtechniker und Elektroniker viel und gut rechnen, also in Mathematik hervorragend sein müssen. Es gibt viele Verfahren, das Formelrechnen zu erlernen; eines der wirksamsten ist die in diesem Buch praktizierte Methode des Wechselgesprächs zwischen dem Praktiker, der lernen will, und dem Ingenieur, der dem Praktiker das Formelrechnen „auf kurzweilige, launige Art" vermitteln will. Daß diese Methode von Erfolg gekrönt ist, mag die Tatsache beweisen, daß dieser leichtverständliche mathematische Lehrgang nun schon in 6. Auflage erscheinen kann.

Der Autor dieses Buches, am 12. Oktober 1895 geboren, gehört zur Fachschriftsteller-Gilde der Radio-Frühzeit; schon 1925 nahm er seine ersten größeren Veröffentlichungen vor. Bekannt wurde er vor allem durch die Zusammenstellung von Röhrentabellen und als Autor der Röhren-Taschen-Tabelle. Seine besondere Neigung gehört außer den Röhren der Mathematik, die er deshalb jedem Techniker nahebringen möchte.